

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 22.11.2012, 12:15h)

1. (a) Zeige, dass

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- (b) Zeige, dass

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(2 + 2 Punkte)

2. (a) Berechne $\binom{12,34}{5}$ auf zwei Nachkommastellen genau.

- (b) Berechne die Anzahl aller Möglichkeiten beim deutschen Lotto („6 aus 49“) einen Tipp abzugeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau drei Zahlen richtig zu haben (ohne Zusatzzahl)?

- (c) Zeige, dass

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

für alle $0 \leq k \leq n$ gilt. Ist die Gleichung auch für $k > n$ erfüllt? Begründe Deine Antwort.

- (d) Die Bundesregierung trifft sich zur Beratung an einem runden Tisch. Berechne die Anzahl der möglichen Sitzordnungen, wenn die einzelnen Sitzplätze alle identisch sind (es gibt keinen Chefsessel)? Wie groß ist der Anteil der Sitzordnungen bei denen Bundeskanzlerin Merkel neben ihrem Stellvertreter Rösler Platz nimmt?

Hinweis: Der aktuellen Bundesregierung gehören 16 Personen an.

(1 + 2 + 3 + 2 Punkte)

3. (a) Zeige durch vollständige Induktion, dass $(1+r)^n \geq 1+nr$ für $r \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- (b) Finde ein Gegenbeispiel für die Ungleichung in (a) für $r < -1$.

- (c) Zeige, dass eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ genau dann ohne Rest durch 3 teilbar ist, wenn x^3 ohne Rest durch 3 teilbar ist.

- (d) Zeige durch vollständige Induktion, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch 9 teilbar ist.

(2 + 1 + 2 + 2 Punkte)

4. (a) Berechne $\sum_{k=12}^{19} \frac{3^{2k}}{12^k}$ auf vier Nachkommastellen genau.
- (b) Durch die Umsetzung Deines Verbesserungsvorschlags zur Organisation der Essensausgabe in der Mensa können nun alle Studenten der Uni innerhalb kürzester Zeit verpflegt werden. Als Anerkennung bekommst Du in den nächsten 4 Jahren monatliche Gutschriften auf Deine Chipkarte, sowie kostenlosen Nachschlag. Du hast die Wahl zwischen zwei Auszahlungsplänen:
- Plan A: Du bekommst im ersten Monat 10,21 €. Bei jeder weiteren Gutschrift erhöht sich der Betrag um 10,21 €.
 - Plan B: Du bekommst im ersten Monat 3000,00 €, aber danach jeweils nur 75% des Betrags des Vormonats gutgeschrieben.

Berechne für beide Pläne den Gesamtbetrag, der Dir im Laufe der vier Jahre gutgeschrieben wird. Gib an, welchen Auszahlungsplan Du wählst und begründe Deine Entscheidung.

(2 + 2 Punkte)