Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Winter 2012/2013
29.11.2012
Blatt 07

# Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 06.12.2012, 12:15h)

1. Herr Schmidt raucht jeden Tag zwei Schachteln Zigaretten à 20 Stück. An seinem 94. Geburtstag am 23.12.12 beschließt er das Rauchen aufzugeben.

   (a) Er hat den Plan jeden Tag eine Zigarette weniger zu rauchen. Also an Tag 1 nur noch 39 Stück usw. Wie viele Zigaretten wird er insgesamt während der Abgewöhnungsphase (einschließlich Tag 1) rauchen?

   (b) Er stellt fest, dass er nach dem ersten Plan an Tag 1 genau 2,5% weniger raucht, als am Tag zuvor. Wenn er die nächsten 39 Tage genauso fortfährt (jeweils 2,5% weniger als am Tag zuvor), wie viele Zigaretten raucht er an Tag 39, an dem er nach Plan (a) seine letzte Zigarette geraucht hätte? Wie viele Zigaretten raucht er insgesamt von Tag 1 bis einschließlich Tag 39?

   *Hinweis*: Runde gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

   (1 + 2 Punkte)

2. An einer Universität ist die Rückmeldegebühr $S$ zum Sommersemester am 31.März fällig. Bezahlt man in den darauffolgenden 30 Tagen, erhöht sich der Betrag um einen Säumniszuschlag von 2%. Nach Ablauf der 30 Tage folgt die Exmatrikulation. Bert bezahlt den Betrag $S$ am Stichtag. Ernie beschließt am Stichtag einen Betrag $P$ auf sein Tagesgeldkonto einzuzahlen und erst nach Ablauf der 30 Tage die Gebühr an die Uni zu überweisen. Auf das Guthaben seines Tagesgeldkontos bekommt Ernie 2,4% Zinsen p.a.

   (a) Wie groß muss $P$ sein, damit Ernie nach 30 Tagen inklusive Zinsen ein Guthaben auf dem Tagesgeldkonto vorfindet, das ausreicht um die Rückmeldegebühr zuzüglich Säumniszuschlag zu bezahlen? (Gib den Wert $P$ in Abhängigkeit von $S$ an.) Lohnt sich Ernies Vorgehen?

   (b) Wie groß muss der Zinssatz auf Ernies Tagesgeldkonto mindestens sein, damit sich die verspätete Zahlung rentiert?

   (2 + 2 Punkte)

3. Um ihrem Kind später bei Bedarf ein Studium finanzieren zu können, zahlen die Eltern monatlich den Betrag $P$ auf ein Konto ein. Die erste Einzahlung findet am Tag der Geburt am 15. Mai 2013 statt. Die letzte Einzahlung findet zum Studienbeginn am 15. Oktober 2032 statt. Das Konto wird jährlich mit dem Zinssatz $r$ verzinst.

   (a) Berechne das Guthaben nach dem letzten Zahlungseingang am 15.10.2032 in Abhängigkeit von $r$ und $P$.

   (b) Wie groß ist das Guthaben nach dem letzten Zahlungseingang am 15.10.2032, wenn monatlich 100 € eingezahlt werden und das Guthaben jährlich mit 1,7% verzinst wird?

(c) Falls die Eltern nur einmalig bei der Geburt einzahlen wollen: Wie groß müsste der eingezahlte Betrag sein, damit am 15.10.2032 das Guthaben dem in Aufgabe (b) berechneten entspricht? Wiederum wird jährlich mit 1,7% verzinst.

*Hinweis*: Die Zinsen werden dem Konto gutgeschrieben.

(2 + 1 + 2 Punkte)

4. Am 01.01.2012 umfasst ein Tannenforst $300\,000\,\mathrm{m}^3$ Holz. Beobachtungen über die letzten Jahre haben ergeben, dass sich die Holzmenge durch das Wachstum der Bäume jedes Jahr um 10% vergrößert. Gleichzeitig kommt es durch Schädlinge und Umwelteinflüsse zu einer Abnahme der Holzmenge um 3%. Zur Weihnachtszeit wurden jedes Jahr Bäume im Umfang von $14\,000\,\mathrm{m}^3$ geschlagen.

   (a) Stelle eine Rekursionsformel auf, mit der man die Holzmenge $h_n$ am 01. Januar des Jahres $2012 + n$ berechnen kann, wenn man die Holzmenge $h_{n-1}$ ein Jahr zuvor kennt ($n \in \mathbb{N}$). Wie viel Holz darf maximal jedes Jahr entnommen werden, ohne dass der Gesamtbestand schrumpft?

   (b) Berechne die Menge Holz, die der Forst am 01.01.2032 umfasst, wenn man davon ausgeht, dass sich die Entwicklung der letzten Jahre fortsetzt.

(2 + 2 Punkte)

5. Nach der Vorlesung wird von der Fachschaft Punsch ausgeschenkt. Die Dozentin und der zufällig anwesende Übungsleiter trinken jeweils eine Tasse (200ml). Der erste Student füllt seinen Halbliter-Becher randvoll. Da nur 3 Liter Punsch im Topf sind, gibt es Befürchtungen, dass der Punsch nicht für alle reichen könnte. Daher wird beschlossen, dass jeder weitere Student nur 80% der Menge seines Vorgängers bekommt.

   (a) Die Menge Punsch (in Litern), die der $n$-te Student bekommt sei $p_n$. Berechne die ersten fünf Elemente der Folge $(p_n)_{n=1}^{300}$ und stelle Formeln zur Berechnung von $p_n$ auf (Rekursionsformel und explizite Darstellung).

   (b) Berechne die Menge an Punsch, die noch übrig ist, nachdem alle 300 anwesenden Studenten versorgt wurden. Wie viele Studenten aus anderen Vorlesungen könnten dazukommen, ohne dass der Punsch zur Neige geht (bei gleichbleibendem Ausschankverfahren)?

(2 + 2 Punkte)

6*. Bonusaufgabe:
Wir betrachten komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ der Form $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zeige durch vollständige Induktion, dass $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(2 Bonuspunkte)

https://www.uni-ulm.de/index.php?id=43468