Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Winter 2012/2013
13.12.2012
Blatt 09

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 20.12.2012, 12:15h)

1. (a) Zeige, dass
$$e^x \geq 1 + x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

   (b) Zeige, dass
$$\frac{1}{1-x} \geq e^x$$
für alle $x < 1$ gilt.

   Hinweis: Eventuell ist die Darstellung $e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ und die Bernoulli-Ungleichung hilfreich.

(2 + 2 Punkte)

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren folgende Grenzwerte?

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x^2 - \frac{1}{n}\right)^3$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{x-3}\right)^n$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^n$

   (d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^{n^2}$

(1 + 1 + 1 Punkte + 1 Bonuspunkt)

3. Betrachte folgende Folgen $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Untersuche die Folgen auf Monotonie. Entscheide anschließend, ob es sich um eine konvergente oder eine divergente Folge handelt (für $n \to \infty$) und begründe Deine Entscheidung. Bestimme bei Konvergenz den Grenzwert s.

   (a) $s_n = \dfrac{(-1)^n(2n)^5}{(3n^2+4)^2}$

   (b) $s_n = \dfrac{n^3}{9^n}$

   (c) $s_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bestimme den Grenzwert folgender Reihen, sofern er existiert. Begründe andernfalls, warum er nicht existiert.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n - 4^n}{8^n}$

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n - 4^n}{3^n}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^3 - (n+1)^3}{9^n}$

   Hinweis: Eventuell ist Aufgabe 3 (b) hilfreich.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

5. Die Folgen $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ seien divergent. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

   (a) Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n := s_n \cdot t_n$ ist divergent.

   (b) Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n := s_n - t_n$ ist divergent.

   (c) Mindestens eine der Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, mit

   $$x_n := \begin{cases} s_n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ t_n & \text{sonst} \end{cases}$$

   $$y_n := \begin{cases} s_n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ t_n & \text{sonst} \end{cases}$$

   ist divergent.

   (1 + 1 + 1 Punkte)

https://www.uni-ulm.de/index.php?id=43468