

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 10.01.2013, 12:15h)

1. Betrachte folgende Gleichungen:

(a) $\log_3 x = 3$

(b) $\log_x 8 = -3$

(c) $e^1 - e^x - e^{x+1} + e^{2x} = 0$

Bestimme für jede Gleichung ihre Lösungsmenge (in \mathbb{R}).

Hinweis: Verwende bei (c) eine geeignete Substitution.

(1 + 1 + 2 Punkte)

2. Zeige oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel): Es gilt

(a) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{c}{a}\right) = \log_c(c) - 1$

(b) $\ln\left(\frac{a+b}{c}\right) = \ln(a) + \ln(b) - \ln(c)$

(c) $\ln(\ln(a^b)) = \ln(\ln(a)) + \ln(b)$

(d) $\ln(\sqrt[3]{abc}) = \frac{1}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c))$

für alle $a, b, c \in (0, \infty)$.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

3. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n := \frac{4}{3n^4 - n^3}, \quad b_n := \frac{n!}{n^n}, \quad c_n := \frac{9n}{(2n+1)^2}.$$

(a) Bestimme die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$, sofern sie existieren.

(b) Untersuche die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auf Konvergenz.

(3 + 3 Punkte)

„Divergente Reihen sind eine Erfindung des Teufels“

(Nils Henrik Abel, norwegischer Mathematiker, 1802-1829)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Zeige, dass

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

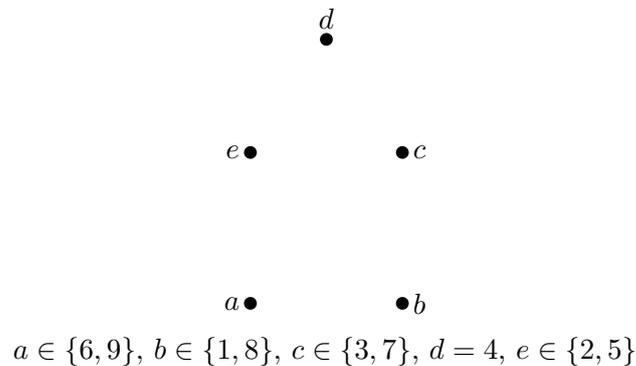
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 Punkte)

5. (a) Die Mitarbeiter einer Fabrik für Lichterketten bekommen am Jahresende eine Sonderzahlung in Höhe von 10% eines Netto-Monatsgehalts. Allerdings wird die Hälfte der Sonderzahlung für diverse Versicherungen und Abgaben einbehalten. Wenn man die Auszahlung (Netto-Gehalt und Netto-Sonderzahlung) an Neujahr auf ein Sparkonto mit einer jährlichen Verzinsung von 2,7% einzahlt, wie viele (ganze) Tage dauert es, bis der Kontostand mindestens dem Netto-Gehalt und der vollen Sonderzahlung entspricht?
- (b) Frau Elfman ist Mitarbeiterin der Fabrik in (a). Sie bekommt ein Netto-Monatsgehalt von 2345 €. Also beträgt ihre Sonderzahlung 234,50 €, sie bekommt aber wegen der Abzüge lediglich 2462,25 € (statt 2579,50 €) ausbezahlt. Wie groß muss die jährliche Verzinsung sein, damit aus 2462,25 € innerhalb eines Monats 2579,50 € werden?
- (c) Herr Elfman bekommt keine Sonderzahlung. Dennoch möchte er sich ein neues Mobiltelefon im Wert von 600 € zulegen. Er spart jeden Tag 1 € und kann so jeden Monat 30 € auf sein Konto einzahlen. Das Konto wird monatlich mit 0,15% verzinst. Wie viele Monate muss er warten, bis er sich das Telefon leisten kann?
- (d) Der Eigentümer der Lichterkettenfabrik verkauft die Fabrik für eine Million Euro. Er legt das Geld sehr sicher an, bekommt dafür aber auch nur 0,8% Zinsen pro Jahr. Wenn er sich jährlich eine Rente von 40 000 € auszahlen lässt, wie lange hat er Zeit, bis das Geld aufgebraucht ist?

Hinweis: Runde auf vier Nachkommastellen.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)



Wir wünschen schöne Feiertage und ein gutes neues Jahr.



<https://www.uni-ulm.de/index.php?id=43468>