Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Winter 2012/2013
10.01.2013
Blatt 11

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 17.01.2013, 12:15h)

1. In dieser Aufgabe soll die Notwendigkeit der Voraussetzungen von Satz 3.33 überprüft werden. Lege zunächst für $a, b \in \mathbb{R}$ beliebige Werte fest (mit $a < b$).
   (a) Finde eine Funktion f_1 auf (a, b), $(a, b]$ oder $[a, b)$, die stetig aber nicht beschränkt ist.
   (b) Finde eine Funktion f_2, die auf dem selben Intervall wie f_1 definiert ist, die stetig und beschränkt ist.
   (c) Finde eine Funktion f_3 auf $[a, b]$, die weder stetig noch beschränkt ist.
   (d) Finde eine Funktion f_4 auf $[a, b]$, die nicht stetig aber beschränkt ist. Damit wird gezeigt, dass die Umkehrung von Satz 3.33 im Allgemeinen nicht gilt.

   Gib jeweils eine passende Funktion an und zeige, dass sie die gewünschten Eigenschaften besitzt.

   (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{|x+30|} & \text{für } x < -5 \\ -\frac{50+5x}{x} & \text{für } -5 < x < 0 \\ \ln(x^2) - \ln(25) & \text{für } 0 < x < 5 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{für } 5 < x < 10 \\ 5 & \text{für } 10 \le x \text{ oder } x \in \{-5, 0, 5\} \end{cases}$$

   (a) Bestimme einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, untersuche das Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs.
   (b) Bestimme alle Punkte in denen die Funktion stetig ist.
   (c) Bestimme alle Punkte in denen die Funktion unstetig ist.
   (d) Skizziere den Graph der Funktion.

   (1 + 2 + 3 + 2 Punkte)

3. Bestimme die folgenden Funktionsgrenzwerte, sofern sie existieren. Begründe andernfalls, wieso sie nicht existieren.
   (a) $\lim\limits_{x \to 8} \left(-x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{x} + 1{,}5\right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x+3} - 2\sqrt{x}\right)\sqrt{x}$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$
   (d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bei der Produktion der Stückzahl $x \in [0, 83]$ (in tausend) entstehen Kosten gemäß der Funktion

$$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}11x^2 + 253x + 40000 \ .$$

Die entsprechende Preis-Absatz-Funktion ist durch

$$p(x) = -58x + 4828$$

gegeben.

Nähere den Break-Even-Point (im Intervall $[0, 40]$) unter Verwendung des Zwischenwertsatzes an. Die Näherung sollte weniger als 0,1 vom wahren Wert entfernt sein.

(2 Punkte)

5. Das Institut für Erforschung der Wirtschaft gibt regelmäßig den ofi-Index heraus, der das aktuelle Geschäftsklima in Deutschland abbildet. In einer Bachelorarbeit wurde gezeigt, dass sich der Index seit einem halben Jahr wie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := 8{,}4t^5 - 21t^4 - 210t^3 + 199$$

verhält. Dabei ist t die Zeit in Monaten von heute ($t = 0$) aus gerechnet (Vergangenheit: $t < 0$, Zukunft: $t > 0$).

Bestimme alle Intervalle in denen der ofi-Index fällt, im Zeitraum von vor sechs Monaten bis in einem Jahr.

(2 Punkte)

6.* Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 = y \\ \frac{x^3y^2}{x^6+y^4} & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig im Punkt $(0, 0)$? Begründe Deine Antwort.

(2 Bonuspunkte)

https://www.uni-ulm.de/index.php?id=43468