

## Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 31.01.2013, 12:15h)

1. Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{2}.$$

- (a) Bestimme die Nullstelle von  $f$  auf drei Nachkommastellen genau mit dem Newton-Verfahren. Wähle einen Startwert  $x_1 \in (0, 2)$ .
- (b) Führe vier Schritte des Newton-Verfahrens durch. Verwende einen Startwert  $x_1 \geq 2,2$ .
- (c) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Funktionen  $g_1, g_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_1(x) = x$  und  $g_2(x) = -\ln x$  mit dem Newton-Verfahren auf drei Nachkommastellen genau.

(2 + 2 + 2 Punkte)

2. Die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien konvex, aber nicht differenzierbar. Zeige, dass dennoch  $f + g$  ebenfalls konvex ist.

(2 Punkte)

3. Es wurde festgestellt, dass eine Kostenfunktion im Bereich  $x \in [0, 6]$  folgende Eigenschaften aufweist:

- An der Stelle  $x = 0$  hat sie den Wert 13 und die Grenzkosten in diesem Punkt betragen 22,5.
- Die Kostenfunktion ist an der Stelle  $x = 3$  maximal.
- Bei  $x = 4$  liegt ein Wendepunkt vor.

Gehe von einer Kostenfunktion in Form eines Polynoms dritten Grades aus. Konstruiere ein solches Polynom, das die oben genannten Eigenschaften besitzt.

(4 Punkte)

*Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.*

4. Betrachte die Angebotsfunktion

$$q(p) = \frac{1}{2}p^2 + 20p + 1\,000.$$

- (a) Bestimme die Elastizitätsfunktion  $\varepsilon_q$ . Verwende  $\varepsilon_q$  um herauszufinden, um wie viel Prozent sich die Angebotsmenge näherungsweise ändert, wenn der Preis von  $p = 100$  um 1% erhöht wird.
- (b) Bestimme die exakte prozentuale Änderung der Angebotsmenge, wenn der Preis von  $p = 100$  um 1% erhöht wird, ohne die Elastizität zu verwenden. Runde auf 6 Nachkommastellen (bzw. Prozentzahlen auf 4 Nachkommastellen).

(2 + 2 Punkte)

5. Betrachte die Funktion  $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = xy e^{2x+3y}.$$

Bestimme alle Bereiche, in denen  $f$  nach beiden Variablen partiell elastisch ist.

(4 Punkte)

6. Berechne folgende Funktionsgrenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{\ln(x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x + 3e^{-x}}{4e^x - 5e^{-x}}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{4-x}$

(e\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

*Hinweis:* Eventuell sind die Regeln von de l'Hospital hilfreich.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte + 2 Bonuspunkte)

