Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Winter 2012/2013
08.02.2013
Blatt 15

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie I

(Keine Abgabe, keine Korrektur)

1. Es sind folgende Angebotsmenge S und Nachfragemenge D gegeben:

$$S := \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : 2p - \tfrac{1}{2}q = 4\right\}, \quad D := \left\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : 24p + 3q = 120\right\}$$

   (a) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht in dieser Situation.
   (b) Bestimmen Sie die rekursive Darstellung (als Differenzengleichung) von p_t im Cobweb-Modell mit $p_0 = 10$ ($t \in \mathbb{N}_0$).
   (c) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung in (b) und damit die explizite Darstellung von p_t.
   (d) Untersuchen Sie das Verhalten der Folge $(p_t)_{t\in\mathbb{N}}$ für $t \to \infty$.

(2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

   eine natürliche Zahl ist.

(10 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{15}{6}\right\}$, für welche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\frac{5x-3}{6x-15}\right)^n$$

   konvergiert. Bestimmen Sie in diesem Fall $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(12 Punkte)

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(k+1)!}{k^{2k}}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k(k-2)(3+k^2)}{3k^4 - 10k^2 + 500}$

(6 + 5 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Nach Ende Ihres Studiums verdienen Sie gut und zahlen am 01. jedes Monats 800 € auf ein Konto ein. Die erste Einzahlung erfolgt am 01.01.2017. Der jährliche Zinssatz beträgt 1,5%. Nach drei Jahren kündigt sich Nachwuchs an, daher erfolgt die letzte Einzahlung am 01.12.2019. In den darauffolgenden Jahren finden weder Ein- noch Auszahlungen statt. Im Jahr 2026 wird das Kind eingeschult und bekommt Taschengeld. Daher heben Sie immer am 01.01. den Betrag A vom Konto ab. Die erste Auszahlung findet am 01.01.2026 statt, die letzte am 01.01.2033.

   (a) Berechnen Sie den Kontostand zum 01.01.2025.

   (b) Wie groß ist die jährliche Auszahlung A, wenn das Guthaben nach der letzten Auszahlung komplett aufgebraucht ist?

   (c) Wenn Sie (statt A) jedes Jahr 2900 € abheben, wie oft können Sie den vollen Betrag abheben ohne das Konto zu überziehen?

(4 + 4 + 4 Punkte)

6. Bestimmen Sie alle Nullstellen, lokale und globale Extrema sowie Sattelpunkte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(tx^3)$$

   in Abhängigkeit von $t > 0$.

(10 Punkte)

7. Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2.$$

   Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte.

(12 Punkte)

8. Betrachten Sie $f : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x^3\, \mathrm{e}^{2y} + \ln(4x + 5) \sin(z^2) - z^y.$$

   Berechnen Sie den Gradienten von f.

(8 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

9. Bei der Herstellung von x Stück des graphischen Taschenrechners T_1 und y Stück des programmierbaren Taschenrechners T_2 (jeweils in 1 000 Stück) entstehen Kosten gemäß der Funktion $K : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$K(x, y) = \exp(ax^2 - by^3).$$

   (a) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte in denen K in beiden Variablen elastisch ist, in Abhängigkeit der Produktionsparameter a und b (wobei $a \neq 0, b \neq 0$).

   (b) Seien jetzt $a = 123, b = -\frac{2}{3}, x = 321!$ und $y = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie näherungsweise die prozentuale Änderung der Kosten, wenn die Produktion von T_2 um 1% erhöht wird. Die Produktion von T_1 bleibt dabei unverändert.

   (c) Seien a, b und x wie in (b). Bestimmen Sie eine Produktionsmenge y bei der sich, bei einer Erhöhung der Produktion um 1%, die Kosten näherungsweise (mindestens) verdoppeln. Wiederum bleibt die Produktion von T_1 unverändert.

(4 + 3 + 4 Punkte)

10. Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie:

   (a) Jedes Polynom vom Grad $n = 5$ hat mindestens eine reelle Nullstelle.

   (b) Jede bijektive, auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte Funktion ist differenzierbar.

   (c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f nicht homogen.

   (d) Jede beschränkte Folge konvergiert.

(3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

11. Bei der letzten Klausur haben fünf Teilnehmer ihre Vorbereitungszeit x in Stunden und ihre erreichten Noten y notiert.

Vorbereitungszeit	25	30	36	38	42
Note	3,7	3,0	2,3	2,3	1,7

   (a) Bestimmen Sie die Werte a und b für die Ausgleichsgerade $y = ax + b$.

   (b) Welche Note bekommt man nach diesem Modell, bei einer Vorbereitsungszeit von 50 Stunden?

(6 + 2 Punkte)

12. Betrachten Sie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x, y) = e^{2x-y} - xy.$$

Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ durch $F(x, y) = \frac{1}{2}$ eine Funktion $y(x)$ implizit definiert wird.

Bestimmen Sie $y'(x)$ und berechnen Sie $y'\left(\frac{1}{2}\right)$.

(6 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

13. Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Parabel $y(x) = x^2 - 9$ zum Ursprung

    (a) mit der Einsetzmethode,

    (b) mit der Lagrange-Methode.

    Der Abstand zweier Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist dabei $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
    Hinweis: Der Abstand zweier Punkte ist genau dann minimal, wenn $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ minimal ist. Bei der Lagrange-Methode genügt es, den kritischen Punkt anzugeben.

    (5 + 5 Punkte)

14. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

    $$f(x, y, z) := x - xy + 2z^2$$

    unter der Nebenbedingung $x + y + z = 8$

    (a) mit der Einsetzmethode,

    (b) mit der Lagrange-Methode.

    Hinweis: Bei der Lagrange-Methode genügt es, den kritischen Punkt anzugeben.

    (5 + 5 Punkte)