Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
22.06.2012
Blatt 10

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 29.06.2012, vor den Übungen)

1. Sie möchten von Frankfurt nach München mit dem Zug fahren. Sie planen hierfür mit dem ICE von Frankfurt nach Ulm zu fahren, dann in Ulm umzusteigen und mit der Regionalexpress weiter bis nach München zu fahren. Die Verspätung (in Minuten) des ICE (X_1) und des RE (X_2) in Ulm lässt sich durch folgende Dichte beschreiben:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{6}\exp\Big(-\frac{3x_1+2x_2}{6}\Big)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_2).$$

Laut Fahrplan kommt der ICE um 13:10 Uhr und der RE um 13:18 Uhr in Ulm an.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$ von $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Verspätung des ICE weniger als 8 Minuten? Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Verspätung des ICE weniger als 4 Minuten und die Verspätung des RE weniger als 6 Minuten?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verpassen Sie den RE nach Stuttgart?

(7 Punkte)

2. Sei X ein Zufallsvektor. Bestimmen Sie die

a) Dichten von X_1 und X_2, falls $X = (X_1, X_2)$ absolutstetig ist mit gemeinsamer Dichte

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = x_2\exp(-x_2(x_1+1))\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_2)$$

b) Zähldichte von X_i, $i = 1,\dots,n$, falls $X = (X_1,\dots,X_n)$ multinomialverteilt ist, d.h. X ist diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = (k_1,\dots,k_n)) = \frac{m!}{k_1!\dots k_n!}p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}\ \forall\ k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k_1+\dots+k_n = m$$

wobei $0 \le p_i \le 1\ \forall\ i = 1,\dots,n$, $p_1+\dots+p_n = 1$ und $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

(6 Punkte)

3. Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{2}{4\exp(-1)-1}x_1\exp(-x_2), & \text{falls } 0 \le x_1 \le 1, 0 < x_2 \le x_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. $Y = (Y_1, Y_2)$ mit gemeinsamer Dichte

$$f_2(y_1,y_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Sind X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2 unabhängig?

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_2(y_1, y_2)$ von Y_1 und Y_2.

c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X_2 unter der Bedingung $\{X_1 = x_1\}$ und die bedingte Verteilungsfunktion $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$ für $0 < x_1 \leq 1$.

(8 Punkte)