Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
29.06.2012
Blatt 11

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 06.07.2012, vor den Übungen)

1. a) Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $X + Y$ gegeben ist durch:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z \geq 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

   b) Seien $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \mathrm{N}(0,2)$ gilt.

(4 Punkte)

2. Angenommen, Sie stehen in einer Warteschlange vor einem Schalter. Die Bedienzeiten in Minuten am Schalter seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde vor Ihnen mindestens doppelt so viel Zeit am Schalter verbringt wie Sie?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre und die Bedienzeit des Kunden vor Ihnen zusammen unter 10 Minuten liegt?

   c) Wie groß ist die erwartete gemeinsame Bedienzeit von Ihnen und dem Kunden vor Ihnen?

(5 Punkte)

3. Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, \text{ falls } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

   Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. (6 Punkte)

4. Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100.000€. Er investiert 60.000€ in eine Anlagemöglichkeit, die eine zufallsabhängige Rendite X mit $\mathbb{E}X = 0.08$ und $\mathrm{Var}X = 0.0004$ besitzt. Die restlichen 40.000€ legt er zur zufallsabhängigen Rendite Y mit $\mathbb{E}Y = 0.06$ und $\mathrm{Var}Y = 0.0001$ an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens Z am Ende der Periode, wenn X und Y

   a) unkorrelierte Zufallsvariablen sind,

   b) den Korrelationskoeffizienten -0.3 besitzen.

   Zeigen Sie hierfür zunächst, dass für zwei Zufallsvariablen X, Y mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ folgendes gilt: $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(6 Punkte)