Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
11.05.2012
Blatt 04

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 18.05.2012, vor den Übungen)

1. a) Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Überprüfen Sie, ob folgende Ereignisse A und B abhängig oder unabhängig sind:
   i. Sei A: „Die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf" und B: „Es erscheint mindestens einmal Zahl".
   ii. Sei A: „Die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf" und B: „Die zweite Münze zeigt Kopf".

   b) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ gegeben durch $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\{k\}) = \frac{1}{4}$ für jedes $k \in \Omega$. Sei weiter $A_k = \{k, 4\}$ für $k = 1,2,3$.
   i. Sind die Paare A_1, A_2 bzw. A_2, A_3 bzw. A_1, A_3 jeweils unabhängig?
   ii. Sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 unabhängig?

(4 Punkte)

2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   a) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.
   b) A, B unabhängig $\Rightarrow A^c, B^c$ unabhängig.

(4 Punkte)

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$. Weiter seien die Abbildungen $X, Y : \Omega \to \{0,1\}$ gegeben durch

$$X(\omega) := \mathbb{1}_{\{1,2,3\}}(\omega) \text{ und } Y(\omega) := \mathbb{1}_{\{1,2\}}(\omega) \ \forall\, \omega \in \Omega$$

   a) Beweisen oder widerlegen Sie: X ist eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.
   b) Beweisen oder widerlegen Sie: Y ist eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.
   c) Bestimmen Sie eine σ-Algebra $\mathcal{F}'$, sodass X bezüglich $(\Omega, \mathcal{F}', \mathrm{P})$ eine Zufallsvariable ist.
   d) Nehmen Sie nun an, dass es sich bei jedem $\omega \in \Omega$ um die Realisation eines fairen Würfelwurfs handelt. Zeichnen Sie für Y bzgl. $\mathcal{F}$ und für X bzgl. $\mathcal{F}'$ jeweils den Graph der Verteilungsfunktion.

(4 Punkte)

Hinweis: Für eine Menge A bezeichnet $\mathbb{1}_A(x)$ die Indikatorfunktion von A, d.h.

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. a) Ein Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X_1 gibt an, wie oft die Augenzahl echt kleiner als 3 ist. Geben Sie eine geeignete Darstellung von $X_1 : \Omega \to C$ mit einem entsprechenden Grundraum Ω und Wertebereich C an. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X_1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 2)$.

b) Sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X_2 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - p, & -1 \leq x < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}xp, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_{X_2} und berechnen Sie $P(-1 < X_2 \leq 1)$, $P(X_2 = 0)$ und $P(X_2 = -1)$.

(6 Punkte)