Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
18.05.2012
Blatt 05

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 25.05.2012, vor den Übungen)

1. Bei einem Glücksspiel wird, ähnlich wie beim Roulette, eine Kugel auf eine sich drehende Scheibe mit durchnummerierten Feldern geworfen, so dass die Kugel rein zufällig (also mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit) auf einem der Felder stehen bleibt. Die Felder sind abhängig von der Zahl n, die der Spieler zu Beginn eines Spiels festlegen muss, durchnummeriert mit den Zahlen $\{-n, -(n-1), -(n-2), \ldots, 0, \ldots, n-2, n-1, n\}$, $n \geq 10$. Für die Teilnahme an dem Spiel muss kein Einsatz gezahlt werden. Bleibt die Kugel auf einem Feld mit negativer Zahl stehen muss der Spieler den Betrag (in €) zahlen, bleibt die Kugel auf einem Feld mit positiver Zahl stehen, so bekommt der Spieler den Betrag (in €) ausgezahlt. Bei einer Null findet keine Zahlung statt.

   a) Welche Zahl n sollte ein (risikoneutraler) Spieler bei Spielbeginn wählen, wenn sein Nutzen durch den Erwartungswert des Spiels (μ) gegeben ist?

   b) Welche Zahl n sollte ein (risikoaverser) Spieler bei Spielbeginn wählen, wenn sein Nutzen durch den Erwartungswert minus der Varianz des Spiels (μ-σ^2) gegeben ist?

   (3 Punkte)

2. Die negative Binomialverteilung ist für eine Zufallsvariable X definiert über die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, \ k \in \mathbb{N}_0$$

   wobei $p \in [0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$ Parameter der Verteilung sind. Man schreibt $X \sim \mathrm{NB}(r,p)$.

   a) Zeigen Sie: $p(k)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, bei einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten $X_1, X_2, \ldots$ (mit Parameter p) beim r-ten Erfolg k-mal Misserfolg gehabt zu haben. (Erfolg im i-ten Wurf bedeutet $X_i = 1$.)

   b) Es sei $X \sim \mathrm{NB}(r,p)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X = \frac{r(1-p)}{p}$. Verwenden Sie hierzu folgende Gleichheit (ohne Beweis):

$$\binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$

   c) Es sei $X \sim \mathrm{NB}(r,p)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}X = \frac{r(1-p)}{p^2}$. Verwenden Sie hierzu folgende Darstellung der Varianz (ohne Beweis):

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.$$

   (8 Punkte)

3. Eine Ölgesellschaft weiß aus Erfahrung, dass die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Probebohrung 0.01 ist und die Bohrungen als unabhängig betrachtet werden können. Berechnen Sie die

   (a) Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den nächsten 300 Probebohrungen höchstens 4 erfolgreich sein werden?

   (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau im dreihundertsten Versuch zum vierten mal eine erfolgreiche Bohrung zu haben?

(4 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X folgendes gilt:

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k) \; \forall \; n, k \in \mathbb{N}.$$

Beantworten Sie zudem die folgende Frage: Wenn beim wiederholten Wurf einer fairen Münze nach zwanzig Versuchen „Kopf“ noch nicht erschienen ist, ist dann die Wahrscheinlichkeit im nächsten Versuch „Kopf “ zu erhalten größer als $\frac{1}{2}$?

(6 Punkte)