Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
25.05.2012
Blatt 06

# Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 01.06.2012, vor den Übungen)

1. Die Anzahl der Schadensfälle bei Versicherungen wird häufig als Poisson-verteilt angenommen. Bei einer speziellen Versicherung zahlt man für einen Vetrag pro Jahr 90 € und erhält 100 € bei jedem Schadensfall. Die Anzahl der jährlichen Schäden (pro Kunde) sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir betrachten nun den Gewinn bzw. Verlust, den die Versicherung bei einem speziellen Versicherten pro Jahr macht.

   a) Wie hoch darf der Parameter $\lambda$ der Poisson-Verteilung der jährlichen Schadensfälle höchstens sein, damit die Versicherung bei dem Kunde im jährlichen Mittel keinen Verlust macht?

   b) Wie hoch darf $\lambda$ höchstens sein, damit die Versicherung bei dem Kunden innerhalb eines Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% keinen Verlust macht?

   (3 Punkte)

2. Aus einer Urne mit $w$ weißen und $s$ schwarzen Kugeln wird n-mal eine Kugel zufällig gezogen. Bei jedem Zug wird eine Kugel gezogen, die dann mit $c$ weiteren Kugeln der selben Farbe in die Urne zurückgelegt wird.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Folge von weißen und schwarzen Kugeln bei n Ziehungen. Verwenden Sie die Multiplikationsregel (Proposition 1.3).

   b) Wie lautet der Erwartungswert für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln bei n Ziehungen? Verwenden Sie (ohne Beweis), dass die Wahrscheinlichkeiten $P(A_j)$ mit $A_j \mathrel{\hat{=}}$ „im j-ten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen“ für alle $1 \leq j \leq n$ gleich hoch sind und für den Erwartungswert $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$ für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt.

   (6 Punkte)

3. Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $p_i = P(X = i) = c * q^i$ für $i = 1, 2, \ldots$ und $0 < q < 1$.

   a) Bestimmen Sie c, so dass $\{p_i\}$ eine Zähldichte bildet.

   b) Bestimmen Sie $P$(X ist gerade).

   c) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariable $Y = \min\{X, 8\}$.

   (6 Punkte)

4. Die Zufallsvariable $X$ sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

   a) Zeigen Sie, dass für die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = k), k \in \mathbb{N}_0$, folgende Rekursionsgleichung gilt: $p_k = \frac{\lambda}{k} p_{k-1}$ für alle $k > 0$.

   b) Zeigen Sie, dass es ein $k_0 \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $p_{k-1} \leq p_k$ für alle $k \leq k_0$ und $p_{k-1} \geq p_k$ für alle $k \geq k_0$.

c) Bestimmen Sie den Modus der Poisson-Verteilung $k_{\text{Modus}}$ d.h. $p_{k_{\text{Modus}}} = \max_{k \in \mathbb{N}_0} p_k$.

(3 Punkte)

(*Freiwillig*: Skizzieren Sie die Zähldichte der Poisson-Verteilung für die Parameter $\lambda = 1.2, 5.5, 10$ und markieren Sie jeweils den Modus der Verteilung.)