



Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 08.06.2012, vor den Übungen)

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c \exp(-\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x)), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

- Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Dichte?
- Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion.
- Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f . Berechnen Sie $P(1 \leq X \leq 4)$ für $\lambda = 1$ und skizzieren Sie f für $\lambda = 1$. Fügen Sie in der Skizze eine anschauliche Interpretation von $P(1 \leq X \leq 4)$ hinzu.

(6 Punkte)

2. a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer absolutstetigen Zufallsvariable X mit folgender Dichtefunktion:

$$\begin{aligned} \text{i. } f_X(x) &= \begin{cases} \frac{3}{8}(x-2)^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{ii. } f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x), & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie, dass folgende Funktion eine Dichte ist:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\cos^3(x)}{3(1-\sin(x))}, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(6 Punkte)

3. Eine Maschine ist ohne Pause solange in Betrieb, bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X , beschreibe die zufällige Funktionsdauer der Maschine und sei absolutstetig mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, wobei $\lambda > 0$ und

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x \exp(-\lambda x), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Weiter sei bekannt, dass die durchschnittliche Funktionsdauer von Maschinen dieser Bauart 100 Stunden beträgt.

- Wie ist der Parameter λ zu wählen, damit der Erwartungswert von X gleich der mittleren Laufzeit dieser Maschinen ist?

- b) Eine Maschine die 100 Stunden lang im Einsatz war, wird ausgewechselt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y , welche die Einsatzzeit (Zeit bis zum Ausfall oder zur Auswechslung) einer Maschine beschreibt.

(6 Punkte)