Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Sommersemester 2012
15.06.2012
Blatt 09

Angewandte Stochastik I

(Abgabe: Fr., 22.06.2012, vor den Übungen)

1. Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = \exp(-X)$ und $X_2 = \max\{X, \frac{1}{3}\}$.

   (4 Punkte)

2. Es sei $p \in (0, 1)$ und $X \sim Geo(p)$ geometrisch verteilt.

   a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion $m_X(t)$ von X und geben Sie an, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sie definiert ist.

   b) Bestimmen Sie das 1. und 2. Moment von X. Verwenden Sie hierzu folgende Eigenschaft der momenterzeugenden Funktion:

   $$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} m_X(t)\Big|_{t=0} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

   (5 Punkte)

3. Eine absolutstetige Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Dauer eines Telefongespräches in Minuten. Die Dichte von X sei gegeben durch

   $$f_X(x) = \frac{1}{16} x e^{-\frac{1}{4}x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, x \in \mathbb{R}.$$

   Eine Telefongesellschaft berechnet für Gepräche bis zu 5 Minuten einen Festpreis von 0.20 €, danach steigt der preis linear zu der Gesprächsdauer mit einem Faktor von 0.03 €/min. Die Zufallsvariable $K = k(X)$ gebe die Kosten eines Telefonanrufes der Länge X an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von K.

   (6 Punkte)

4. Das empirische q-Quantil $\widetilde{x}_q$ einer Stichprobe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist als der Wert definiert, für den mindestens q% der Beobachtungen kleiner-gleich und mindestens $(1 - q)$% der Beobachtungen größer-gleich sind. Man kann das empirische q-Quantil $\widetilde{x}_q$, einer aufsteigend geordneter Stichprobe, definieren als

   $$\widetilde{x}_q = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n \cdot q} + x_{n \cdot q + 1}), & \text{wenn } n \cdot q \text{ ganzzahlig ist,} \\ x_{\lceil n \cdot q \rceil}, & \text{wenn } n \cdot q \text{ nicht ganzzahlig ist.} \end{cases}$$

   Der Median einer Stichprobe ist das empirische Quantil mit q=0.5. Gegeben sei folgende Stichprobe:

   $$\{0.94, 1.66, 1.36, 0.27, 0.31, 1.43, 0.26, 5.61, 0.50, 2.17, 0.68\}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter λ der Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ so, dass der Median der Verteilung dem Median der Stichprobe entspricht. Bestimmen Sie den Parameter μ der Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, 1)$ mit fester Varianz $\sigma^2 = 1$ so, dass der Median der Verteilung dem Median der Stichprobe entspricht.

b) Wie gut beschreiben die, an den Median der Stichprobe angepassten, Verteilungen aus a) das 20%-Quantil der Stichprobe?

(6 Punkte)