



Angewandte Stochastik II

(Abgabe: Mo., 29.10.2012, vor den Übungen)

1. In Deutschland sind 4% der Bundesbürger Linkshänder.

- Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 800 Studenten zwischen 24 und 40 Linkshänder sind.
- Berechnen Sie für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses aus a) eine Näherung unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes.

(6 Punkte)

2. Sei X_1, \dots, X_n eine Zufallsstichprobe der Zufallsvariablen X , wobei X absolutstetig verteilt ist mit Dichte

$$f_\theta(x) = (\theta + 2(1 - \theta)x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \text{ für } \theta \in [0, 2].$$

- Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ und $\mathbb{E}(X^4)$ in Abhängigkeit von θ .
- Zeigen Sie, dass die Schätzer

$$T_n^{(1)}(X_1, \dots, X_n) = 4 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ und } T_n^{(2)}(X_1, \dots, X_n) = 3 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

erwartungstreu für θ sind und berechnen Sie die Varianzen der Schätzer in Abhängigkeit von θ .

- Zeigen Sie, dass $T_n^{(1)}$ und $T_n^{(2)}$ schwach konsistent für θ sind.

(6 Punkte)

3. Es sei X_1, \dots, X_n eine Zufallsstichprobe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $X_i \sim U(0, \theta)$ für $\theta > 0$. $X_{(n)}$ bezeichne das Maximum der Stichprobe.

- Zeigen Sie für $0 < x < \theta$, dass $F_{X_{(n)}}(x) = (F_{X_i})^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$.
- Zeigen Sie, dass der Schätzer $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ für θ erwartungstreu ist.
- Konstruieren Sie einen weiteren erwartungstreuen Schätzer $\hat{\theta}_2$ für θ .

(4 Punkte)

4. Gegeben seien die Realisierungen $\{7, 6, 4, 4, 5, 7, 3, 6, 7, 4\}$ eines zufälligen Ergebnisses X eines Zufallsexperiments. Es wird davon ausgegangen, dass $X \sim B(n, p)$ gilt.

- Bestimmen Sie die Momentenschätzer \hat{n} und \hat{p} der Parameter der Binomialverteilung.
- Berechnen Sie die Momentenschätzer für die Stichprobe.

(4 Punkte)