Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Wintersemester 2012/13
31.10.2012
Blatt 02

Angewandte Stochastik II

(Abgabe: Mo., 12.11.2012, vor den Übungen)

Definition (Mittlerer quadratischer Fehler (mean squared error)):
Der mittlere quadratische Fehler eines Schätzers $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ für θ ist definiert als

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbb{E}_\theta((\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n) - \theta)^2).$$

Definition (Vergleich von Schätzern):
Seien $\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)$ und $\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)$ zwei Schätzer für θ. Man sagt, dass $\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)$ besser ist als $\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)$, falls

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)) < \mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)) \ \forall \ \theta \in \Theta.$$

---

1. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.
   a) Konstruieren Sie einen ML-Schätzer für θ.
   b) Konstruieren Sie einen Momentenschätzer für θ.
   c) Welcher der beiden Schätzer ist bei einem Stichprobenumfang von $n > 2$ besser?

   (8 Punkte)

2. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe einer diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\frac{\theta}{2})^{x^2}(1-\theta)^{1-x^2}, & \text{falls } x \in \{-1, 0, 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   und $\theta \in (0, 1)$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ für θ. (4 Punkte)

3. Gegeben sei die Dichte $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$ für $\theta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
   a) Berechnen Sie einen ML-Schätzer $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ für θ.
   b) Zeigen Sie, dass der mittlere quadratische Fehler des ML-Schätzers aus b) für steigenden Stichprobenumfang gegen 0 konvergiert.

   (6 Punkte)

4. Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion von X.
   b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$ mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion.

c) Sei $Y \sim N(0,1)$ eine zu X unabhängige Zufallsvariable. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X+Y)$ mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion.

(5 Punkte)

Hinweis zu Aufgabe 4: Für die momenterzeugende Funktion gilt: $E(X^k) = m_X^{(k)}(0)$. Die Normierung mit $k!$, wie in der Vorlesung angeschrieben ist nicht richtig.