Dr. Hartmut Lanzinger
Pasquale Vito Baccelliere

Wintersemester 2012/13
14.11.2012
Blatt 03

Angewandte Stochastik II

(Abgabe: Mo., 26.11.2012, vor den Übungen)

Theorem (Satz von Slutzky):
Seien $X, X_n, Y, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen über dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $c \in \mathbb{R}$ und sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$, falls $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{d} c$.
- $\phi(X_n) \xrightarrow{d} \phi(X)$, falls $X_n \xrightarrow{d} X$.

Bemerkung:
Seien $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Falls $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ oder $X_n \xrightarrow{P} X$, dann gilt $X_n \xrightarrow{d} X$.

---

1. a) Zeigen Sie, dass für die k-ten Momente der $\Gamma(r, \lambda)$-Verteilung folgende Formel gilt

$$\mathbb{E}X^k = \frac{r \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r + (k-1))}{\lambda^k} \;\forall k \in \mathbb{N}$$

und berechnen Sie die Varianz in Abhängigkeit der Parameter r und λ.

   b) Bestimmen Sie den Erwartungswert (für $s > 2$) und die Varianz (für $s > 4$) der $F_{r,s}$-Verteilung in Abhängigkeit der Parameter r und s.

(5 Punkte)

2. Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ u.i.v. für ein $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\overline{X}_n$ sowie den Erwartungswert und Varianz von $\overline{X}_n$ und S_n^2. Dabei kann die Formel $\mathrm{Var}S_n^2 = \frac{1}{n}(\mu_4' - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4)$ verwendet werden, wobei μ_4' das 4. zentrierte Moment $\mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}X_1)^4$ und σ die Standardabweichung von X_1 bezeichnet.

(5 Punkte)

3. Es bezeichne $F_{r,s,\alpha}$ das α-Quantil der F-Verteilung mit r, s Freiheitsgraden, und $\chi^2_{r,\alpha}$ das α-Quantil der χ^2_r-Verteilung mit r Freiheitsgraden. Zeigen Sie:

   a) Für $\alpha \in (0,1)$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt: $F_{r,s,\alpha} \to \frac{\chi^2_{r,\alpha}}{r}$ für $s \to \infty$.
   b) Für $\alpha \in (0,1)$ und $s \in \mathbb{N}$ gilt: $F_{r,s,1-\alpha} \to \frac{s}{\chi^2_{s,\alpha}}$ für $r \to \infty$.

(5 Punkte)

4. Sei t_n eine t-verteilte Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden und $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Zeigen Sie, dass $t_n \xrightarrow{d} X$, die t_n-Verteilung also mit steigenden Freiheitsgrad n gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

(5 Punkte)

5. a) Plotten Sie die Dichte der t_n-Verteilung mit Parameter $n = 1, 3, 10, 25$ und die Dichte der Standardnormalverteilung in ein gemeinsames Schaubild.

   b) Plotten Sie die Dichte der $F_{r,s}$-Verteilung mit Parametern $(r, s) = (10, 1), (10, 3), (10, 10), (10, 25)$ in ein gemeinsames Schaubild. Fügen Sie dem Schaubild den Median der unterschiedlichen $F_{r,s}$-Verteilungen sowie den normierten Median der χ^2_{10}-Verteilung aus Aufgabe 5 a) hinzu.

Achten Sie dabei jeweils darauf, dass man die Dichten unterscheiden kann und sie mit den entsprechenden Parameterwerten beschriftet sind.

(5 Punkte)