



## Angewandte Stochastik II

(Abgabe: Mo., 07.01.2013, vor den Übungen)

1. Der Student Peter ernährt sich hauptsächlich von Fertigpizzas. Hierbei bevorzugt er zwei Marken "Originale Italiana" und "Heiße Steinofen". In seiner Tiefkühltruhe hat er noch 7 Pizzas jeder Sorte. Peter möchte den Kaloriengehalt der Pizzas untersuchen. Für die Pizzas misst Peter folgende Werte (kcal/100g)

	1	2	3	4	5	6	7
Originale Italiana	197	203	202	202	202	212	203
Heiße Steinofen	204	199	204	206	211	203	203

Peter nimmt an, dass die Kalorien (kcal/100g) einer Pizza von "Originale Italiana" bzw. "Heiße Steinofen"  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - bzw.  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt sind.

- Die Packung der "Originale Italiana" verspricht, dass die Pizza maximal 200 kcal/100g hat. Peter vermutet allerdings, dass die Pizza mehr Kalorien enthält und möchte diese Vermutung statistisch bestätigen. Er testet deshalb die Hypothesen  $H_0 : \mu_1 \leq 200$  gegen  $H_1 : \mu_1 > 200$  zum Signifikanzniveau 0.1. Welches Ergebnis bringt der Test?
  - Skizzieren Sie die Gütefunktion des Tests aus a). Lesen Sie aus dem Schaubild ab, wie groß die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art maximal werden kann.
  - Warum führt Peter nicht den Test  $H_0 : \mu_1 \geq 200$  gegen  $H_1 : \mu_1 < 200$  durch?
  - Peter vermutet, dass die "Originale Italiana" und die "Heiße Steinofen" unterschiedlich viel Kalorien haben. Führen Sie einen geeigneten Test zum Signifikanzniveau 0.05 durch. (6 Punkte)
2. Es sei  $(X_1, X_2)$  eine Zufallsstichprobe mit  $X_i \sim U(\theta, \theta + 1)$  und  $\theta \in \mathbb{R}$ . Um die Nullhypothese  $H_0 : \theta \leq 0$  gegen die Alternativhypothese  $H_1 : \theta > 0$  zu testen, betrachten wir zwei Tests:

$$\phi_1(X_1, X_2) = \mathbb{1}(X_1 > 0.95) \text{ und } \phi_2(X_1, X_2) = \mathbb{1}(X_1 + X_2 > c), c > 0.$$

- Bestimmen Sie die Dichte von  $X_1 + X_2$  für beliebiges  $\theta$ .
- Bestimmen Sie die Gütefunktion  $G_1(\theta)$  von  $\phi_1$ .
- Bestimmen Sie die Gütefunktion  $G_2(\theta)$  von  $\phi_2$ .
- Finden Sie ein  $c$ , für das die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art bei  $\phi_1$  und  $\phi_2$  übereinstimmt.

(6 Punkte)

3. Gegeben sei die Dichte

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $\theta \in \{2, 5\}$ . Anhand einer Beobachtung  $X_1$  sollen folgende Hypothesen getestet werden.

$$H_0 : \theta = 2 \text{ gegen } H_1 : \theta = 5.$$

- a) Konstruieren Sie einen Test für die obigen Hypothesen zum Niveau  $\alpha = 0.1$ .
- b) Bestimmen Sie die Gütefunktion des Tests aus a).

(4 Punkte)

4. In einer Klinik wurden bei 21 neugeborenen Jungen das Durchschnittsgewicht  $\bar{x}_{21} = 3300g$  und die Standardabweichung  $s_x = 470g$  festgestellt. Entsprechend erhielt man bei der Stichprobe von 16 Mädchen das Durchschnittsgewicht  $\bar{y}_{16} = 3050g$  und die Standardabweichung  $s_y = 460g$ . Es wird angenommen, dass die Stichproben von Jungen und Mädchen unabhängig sind, und dass das Gewicht der Jungen  $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ -verteilt und das der Mädchen  $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ -verteilt ist.

- a) Testen Sie  $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$  gegen  $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$  zum Niveau  $\alpha = 0.1$ . (Hinweis: Für die F-Verteilung gilt:  $F_{20,15,0.05} = 0.4538$  und  $F_{20,15,0.95} = 2.3275$ .)
- b) Testen Sie:  $H_0 : \mu_x = \mu_y$  gegen  $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$  zum Niveau  $\alpha = 0.05$  unter der Annahme  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ . (Hinweis: Für die Quantile der t-Verteilung gilt:  $t_{35,0.95} = 2.03$ .)

(6 Punkte)

**Wir wünschen allen Teilnehmern der Angewandten Stochastik II frohe  
Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2013!**