Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
04.06.2012
Blatt 06

Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Montag, den 11.06.2012)

1. Lade die Datei `data05.dat` von der Homepage. Sie enthält eine Realisierung der Daten von Blatt 05.

   Führe eine Regression mithilfe der Kleinste-Quadrate-Methode mit Strafterm für verschiedene Werte des Glättungsparameters λ durch. Plotte die Punkte, sowie die verschiedenen Regressionskurven in ein gemeinsames Schaubild. Bestimme den Wert des Glättungsparameters, den die Funktion `smooth.spline()` verwendet, falls nichts vorgegeben wird.

   Hinweis: Eventuell ist die Funktion `smooth.spline()` hilfreich.

   (6 Punkte)

2. Bei der Kleinste-Quadrate-Methode mit Strafterm wurde in der Vorlesung die Situation $Y_i = m(t_i) + \varepsilon_i$ mit ε_i i.i.d. betrachtet. Nun sei $\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^\top \sim \mathrm{N}(0, \Sigma)$ mit einer bekannten, invertierbaren Kovarianzmatrix Σ.

   (a) Bestimme $\hat{c}$ und $\hat{Y}$ mithilfe der Kleinste-Quadrate-Methode mit Strafterm (analog zum Vorgehen in der Vorlesung, siehe Hinweis).

   (b) Bestimme $\mathbb{E}(\hat{c})$ und $\mathrm{Cov}(\hat{c})$ für beide Situationen ($\Sigma = I_n$ und $\Sigma \neq I_n$).

   (c) Was geschieht bei einer Iteration des Verfahrens? Was geschieht also, wenn $\hat{Y}$ als (neue) Stichprobe angesehen wird und daraus wiederum $\hat{\hat{Y}}$ berechnet wird (und dieses Vorgehen mehrmals wiederholt wird)?

   Hinweis: Wie im Abschnitt zur Orthogonalreihenentwicklung kann man das Modell $Y_i = m(t_i) + \varepsilon_i$ mit $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ durchmultiplizieren um zur Situation mit i.i.d. Störgrößen zurückzukehren. Man minimiert dann $\|\Sigma^{-\frac{1}{2}} Y - \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Phi c\|_2^2 + \lambda c^\top R c$ bezüglich c.

   (3 + 2 + 1 Punkte)