Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
11.06.2012
Blatt 07

Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Montag, den 18.06.2012)

1. Lade die Datei `skampf.dat` von der Homepage. Sie enthält Daten des olympischen Siebenkampfes 1988 in Seoul. Transformiere zunächst die Werte für Hürdenlauf, 200m und 800m, so dass ein höherer Wert einer besseren Leistung entspricht (z.B. durch `skampf$huerden <- max(skampf$huerden)-skampf$huerden`).

   Führe eine Hauptkomponentenanalyse der Daten (ohne die Spalte `punkte`) mithilfe der Funktion `prcomp()` durch. Gib die Matrix der Eigenvektoren an und plotte die Varianzen (d.h. die Eigenwerte der Kovarianzmatrix). Trage die Punkte $(x_i, c_{i,1})$ in ein Schaubild ein, wobei x die erreichte Punktzahl der Teilnehmerin i ist und $c_{i,1}$ die zugehörige erste Hauptkomponente.

   (5 Punkte)

2. W sei ein Wiener-Prozess auf dem Intervall $[0,1]$ (vergleiche Blatt 01), also $\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s;t)$ und $\mathbb{E}(W(t)) = 0$. Berechne die Eigenwerte λ und Eigenfunktionen ϕ des Operators C wie in der Vorlesung. Finde also für

   $$C : L_2([0,1]) \mapsto L_2([0,1]) \text{ mit } (C \circ f)(s) := \int_0^1 \mathrm{Cov}(W(s), W(t)) f(t)\,\mathrm{d}t$$

   alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\phi \in L_2([0,1])$ mit $C \circ \phi = \lambda\phi$.

   Gehe dazu in folgenden Schritten vor:

   (a) Zeige, dass in diesem Fall Lösungen der Eigengleichung $C \circ \phi = \lambda\phi$ durch Lösungen der Differentialgleichung $\phi'' = -\frac{1}{\lambda}\phi$ gegeben sind.

   (b) Löse die Differentialgleichung $\phi'' = -\frac{1}{\lambda}\phi$ mithilfe des Ansatzes $\phi(s) = c_1 \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right) + c_2 \cos\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right)$ und den Werten $\phi(0), \phi(1)$, sowie der Bedingung $\|\phi\|_2 = 1$.

   (3 + 4 Punkte)