Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
18.06.2012
Blatt 08

Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Montag, den 25.06.2012)

1. W sei ein Wiener-Prozess auf dem Intervall $[0,1]$ (vergleiche Blatt 01), also $\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s;t)$ und $\mathbb{E}(W(t)) = 0$. Außerdem seien ϕ_n und λ_n die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Kovarianzoperators (vergl. Blatt 07, Nr. 2).

   Zeige, dass $\xi_n := \langle W, \phi_n \rangle_{L_2} \sim \mathrm{N}(0, \lambda_n)$. Gehe dazu wie folgt vor:

   - Zeige, dass $X_m^{(n)} := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m W(\frac{j}{m})\phi_n(\frac{j}{m}) \sim \mathrm{N}(0, \sigma_m^2(n))$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt.
   - Zeige dann, dass $\sigma_m^2(n) \to \lambda_n$ für $m \to \infty$.
   - Zeige schließlich, dass $X_m^{(n)} \to \xi_n$ fast sicher für $m \to \infty$.

   (4 Punkte)

2. X sei ein stochastischer Prozess auf dem kompakten Intervall T. Wie in der Vorlesung sei $\mu(t)$ die Erwartungswertfunktion und λ_n seien die Eigenwerte des Kovarianzoperators (vergl. Blatt 07, Nr. 2).

   Zeige, dass
   $$\int_T \mathrm{Var}\big(X(t) - \mu(t)\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$
   gilt.

   (3 Punkte)

3. Simuliere (näherungsweise) Realisierungen W_p eines Wiener Prozesses W auf $[0,1]$ mithilfe der FPCA, wie in der Vorlesung vorgestellt, also
   $$W_p(t) := \sum_{n=1}^{p} \xi_n \phi_n(t)$$
   mit $\xi_n \sim \mathrm{N}(0, \lambda_n)$ unabhängig (vergl. Nr. 1). Dabei sei $\phi_n(t) = \sqrt{2}\sin\big((2n-1)\frac{\pi}{2}t\big)$ und $\lambda_n = \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}$ wie auf Blatt 07 berechnet.

   (a) Erzeuge eine Realisierung von $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_{256})$. Erstelle mit diesem ξ jeweils eine Realisierung von W_i für $i = 4^k$ und $k = 1, \dots, 4$. Erstelle ein gemeinsames Schaubild der $W_i(t)$.

   (b) Erzeuge 15 Realisierungen von W_p mit $p = 500$ und plotte sie in verschiedenen Farben in ein gemeinsames Schaubild.

   Beim Erstellen der Schaubilder soll $W_i(t)$ jeweils an mindestens 1000 Punkten im Intervall $[0,1]$ ausgewertet werden.

   (3 + 2 Punkte)