Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
25.06.2012
Blatt 09

Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Montag, den 02.07.2012)

1. W sei ein Wiener-Prozess auf dem Intervall $[0,1]$. Erzeuge Realisierungen $W_j, j = 1, \ldots, 200$ von W, jeweils an den Punkten $t_i := \frac{i}{500}, i = 0, \ldots, 500$ nach der Methode von Blatt 01. Plotte zur Kontrolle die ersten 15 Realisierungen. Berechne anschließend die empirische Kovarianzmatrix $\hat{C}$ des Wiener-Prozesses mit $\hat{C}_{i,j} := \frac{1}{199} \sum_{k=1}^{200} \big(W_k(\frac{i}{500}) - \overline{W}(\frac{i}{500})\big)\big(W_k(\frac{j}{500}) - \overline{W}(\frac{j}{500})\big)$ für $i, j = 1, \ldots, 500$ (sh. Vorlesung, Datensituation (i)).

   Berechne nun mit $\hat{C}$ eine Näherung der Eigenwerte λ_k und Eigenfunktionen ϕ_k des Kovarianzoperators. Finde dazu Eigenwerte und -vektoren des Eigenwertproblems $\frac{1}{500}\hat{C}v = \mu v$ mit $\mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^{500}$. Betrachte dann $\hat{\lambda}_k := \mu_k$ und $\hat{\phi}_k(\frac{i}{500}) := \sqrt{500} v_i^{(k)}$ ($i = 1, \ldots, 500$, $v_i^{(k)}$ ist der i-te Eintrag des k-ten Eigenvektors) und $\hat{\phi}_k(0) := 0$.

   Erstelle nun folgende Plots:

   - Rekonstruiere die erste Realisierung näherungsweise wie auf Blatt 08, Aufgabe 3, also $\hat{W}_1^{(p)}(t) := \sum_{n=1}^{p} \hat{\xi}_n \hat{\phi}_n(t)$, wobei $t = \frac{i}{500}, i = 0, \ldots, 500$ und $\hat{\xi}_n := \langle W_1, \hat{\phi}_n \rangle$. Plotte W_1 und $W_1^{(p)}$ für $p = \lfloor 1{,}7^k \rfloor, k = 1, \ldots, 10$.
   - Plotte die theoretischen Eigenfunktionen ϕ_n (vergl. Blatt 07, Nr. 2) und die Näherungen $\hat{\phi}_n$ für $n = \lfloor 1{,}5^k \rfloor$ $k = 1, \ldots, 9$. Was fällt auf?
   - Plotte die Differenzen zwischen den ersten hundert theoretischen und geschätzten Eigenwerten.

   Hinweis: Evtl. sind die Funktionen `eigen()` und `cov()` hilfreich.

   (6 Punkte)

2. Betrachte den Datensatz der kanadischen Tagesdurchschnittstemperaturen. Er befindet sich im Paket `fda` unter `CanadianWeather$dailyAv[,,1]`. Wir befinden uns also in der Datensituation (iii) aus der Vorlesung: 35 Realisierungen eines stochastischen Prozesses mit Messfehlern.

   Schätze die Autkovarianzfunktion für einige Werte und üeberprüfe, ob sie symmetrisch ist.

   Bonusaufgabe (ohne Bewertung): Versuche, wie in der ersten Aufgabe, die ersten Eigenfunktionen anzunähern.

   Hinweis: Eventuell sind die Funktionen `outer()` und `optim()` hilfreich.

   (6 Punkte)