Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
03.07.2012
Blatt 10

Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 12.07.2012)

1. W sei ein Wiener-Prozess auf dem Intervall $[0,1]$ mit Kovarianzfunktion $C : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}$ (vergl. Blatt 01).

   (a) Berechne $\|C\|_{L_2}$ und zeige, dass $\|C\|_{\mathrm{Op}} < \|C\|_{L_2}$ gilt (dabei ist $\|\cdot\|_{\mathrm{Op}}$ die Operatornorm).

   (b) Zeige, dass $\|C\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ gilt (dabei ist $\|\cdot\|_{L_2}$ die $L_2(T)$-Norm mit $T = [0,1]^2$).

   (c) Berechne $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-4}$.

   Hinweis: Es gilt $C(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(s)\phi_k(t)$.

   (3 + 3 + 1 Punkte)

2. Der Datensatz `hatcov.dat` auf der Homepage enthält die Werte $\hat{C}(t_i, t_j)$ des Schätzers $\hat{C}$ der Kovarianzfunktion, der in Aufgabe 2 von Blatt 09 aus den kanadischen Wetterdaten geschätzt wurde (mit $t_i = 15i$ für $i = 1, \ldots, 24$).

   Wir gehen davon aus, dass ein Zusammenhang zwischen der jährlichen Niederschlagsmenge Y_i (ebenfalls im Datensatz `CanadianWeather` enthalten) und dem Temperaturverlauf $X_i(t)$ bei Wetterstation i besteht. Es wird das Modell

   $$Y = \alpha + \langle X - \mu, \beta \rangle + \varepsilon$$

   zugrunde gelegt.

   Berechne und plotte $\hat{\beta}_p(t) = \sum_{k=1}^{p} \hat{\beta}_k \hat{\phi}_k(t)$ für einen passenden Wert von p.

   Hinweis: Eventuell ist die Funktion `lm()` hilfreich.

   (5 Punkte)