Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte, alles Zusatzpunkte
Abgabe: Mittwoch, 20. Februar 2013, vor den Übungen

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $M = m_1 \cdots m_r$ mit paarweise teilerfremden $m_i \in \mathbb{N}$.
   Für $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{Z}^{(n,n)}$ sei $\mathcal{A}_m = (a_{ij} \bmod m)_{1 \le i,j \le n} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{(n,n)}$.
   Zeige:

   (a) $GL(n, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \cong GL(n, \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times \ldots \times GL(n, \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z})$.

   (b) Es gilt genau dann $\mathcal{A} \in GL(n, \mathbb{Z})$, wenn $\mathcal{A}_p \in GL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für alle Primzahlen p erfüllt ist.
   (8 Punkte)

2. Es sei $R = \mathbb{Z}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{6} \colon a_i \in \mathbb{Z}\}$. Zeige, dass die Einheitengruppe R^*, als $\mathbb{Z}$- Modul betrachtet, einen freien Untermodul vom Rang 2 enthält.

   Hinweis:
   Betrachte die Einheiten $\eta_1 = 1 + \sqrt{2}$ und $\eta_2 = 2 + \sqrt{3}$. (4 Punkte)

3. Ist R kein Hauptidealring, so hat der R- Modul R einen Untermodul, der nicht frei ist.

   Hinweis:
   Betrachte ein Ideal von R mit zwei Erzeugenden, das kein Hauptideal ist. (4 Punkte)

4. **Die Letzte.**
   Auf der "Arithmetik an der A7" im Januar 2013 in Würzburg wurde folgendes Problem diskutiert: "Wenn man zufällig zwei Schwestern aus der Familie Holland auf der Straße trifft, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide blaue Augen haben, genau 0,5.
   Dabei sei die Begegnung auf der Straße eine echte Zufallsauswahl unter allen Töchtern dieser Familie. Wieviele Töchter hat die Familie Holland und wieviele davon sind blauäugig?"

   (a) Stelle einen Bezug zu einer Übungsaufgabe in diesem Semester her.

   (b) Gib eine Lösung dieser Aufgabe an.

   (c) Gibt es zu diesem Problem unendlich viele Lösungen? Falls ja, so bestimme sie alle.

   Hinweis:
   Im Januar 2012 fand die "Arithmetik an der A7" in Ulm statt.
   Dabei ist diese Aufgabe ein schönes Beispiel einer Aufgabe des Instituts für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie. (8 Punkte)