Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 4. Dezember 2012, vor den Übungen

1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, \sqrt[3]{2})$. Zeige:

   (a) Die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ hat einen Normalteiler $N_3 \trianglelefteq G(L/\mathbb{Q})$ mit $|N_3| = 3$ und eine Untergruppe U_4 mit $|U_4| = 4$.
   Es gibt einen Homomorphismus $\Phi\colon U_4 \to \mathrm{Aut}(N_3)$, so dass $G(L/\mathbb{Q}) \cong N_3 \times_\Phi U_4$ ist.

   (b) Die Gruppe $G(L/\mathbb{Q})$ hat einen zyklischen Normalteiler C_6 mit $|C_6| = 6$. Bestimme L^{C_6}.

   (c) Ist $G(L/\mathbb{Q})$ isomorph zur Diedergruppe D_6, der Symmetriegruppe des regulären Sechsecks?

   (6 Punkte)

2. Es seien die Polynome f über $f(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ und g durch $g(X_1) = f(X)$ mit $X = X_1 - \frac{a_2}{3}$ gegeben. Zeige, dass f und g dieselbe Diskriminante haben. (6 Punkte)

3. (a) Zeige, dass das Quadrat der Determinante der Matrix

   $$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{n-1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & u_n & u_n^2 & \dots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

   ein konstantes Vielfaches der Diskriminante ist.

   (b) Bestimme die Konstante. (6 Punkte)

4. Bestimme für jedes der folgenden Polynome, ob es sich um eine symmetrische Funktion handelt und drücke sie gegebenenfalls durch die elementarsymmetrischen Funktionen aus.

   (a) $u_1^2u_2 + u_2^2u_1$, $(n = 2)$

   (b) $u_1^2u_2 + u_2^2u_3 + u_3^2u_1$, $(n = 3)$

   (c) $(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)(u_1 + u_3)$, $(n = 3)$ (6 Punkte)