Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 11. Dezember 2012, vor den Übungen

1. Es sei der Ring der $(2,2)$- Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ gegeben. Wir betrachten die Untermenge der Hamilton-Quaternionen
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\},$$
welche einen reellen Vektorraum der Dimension 4 darstellen. Zeige:
   (a) Bezüglich der Matrizenaddition und -multiplikation ist $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper.

   Hinweis:
   Bei einem Schiefkörper wird die Kommutativität der Multiplikation nicht gefordert.

   (b) Mit den speziellen Quaternionen
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   ist durch die Menge $\{A, B, C, D\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{H}$ über $\mathbb{R}$ gegeben.

   (c) Die Menge $Q = \{\pm A, \pm B, \pm C, \pm D\}$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8.

   (d) Alle nichttrivialen Untergruppen von Q sind durch $\langle -A \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle C \rangle$ und $\langle D \rangle$ gegeben, und alle diese Untergruppen sind auch Normalteiler.

   (e) Es sei $\mu = (1+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Der Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\mu})$ ist über $\mathbb{Q}$ galoissch.

   Hinweis:
   Beachte $(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2}) = -1$ und $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$.
   Jeder Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ besitzt genau zwei Fortsetzungen auf K.

   (f) Die Galoisgruppe ist zu Q isomorph.

   (g) Bestimme alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$.

   (h) Es gilt $Q \ncong D_4$, wobei D_4 die Symmetriegruppe des Quadrats ist. (18 Punkte)

2. Es sei p eine Primzahl und K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$. Das Polynom $f(X) = X^p - X + c$ mit $c \in K$ habe keine Nullstelle in K, und L sei der Zerfällungskörper von f über K. Zeige, dass es keinen echten Zwischenkörper Z gibt, d.h. aus $K \subset Z \subset L$ folgt $Z = K$ oder $Z = L$. (2 Punkte)

3. Es sei p eine Primzahl, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $f(X) = X^4 + 1 \in K[X]$. Zeige, dass f reduzibel ist.

   Hinweis:
   Ist L der Zerfällungskörper von f über K, so folgte aus der Irreduzibilität von f die Aussage $G(L/K) \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$. (2 Punkte)

4. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{3}, i)$. Bestimme $d \in \mathbb{Z}$, so dass $L(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. (2 Punkte)