Übungen zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 18. Dezember 2012, vor den Übungen

1. Es sei $p > 2$ eine Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$ und ζ_p eine primitive p- te Einheitswurzel. Weiter sei $\sqrt[p]{a^i} \notin \mathbb{Q}$ für $i \in \{1, \dots, p-1\}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a}, \zeta_p)$. Zeige:
   (a) Es ist $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung und $[L\colon \mathbb{Q}] = p \cdot (p-1)$.
   (b) Die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ ist zu
   $$AG(p) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*,\ s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$
   isomorph.
   (c) Jede Untergruppe von $G(L/\mathbb{Q})$ ist zu einer der Gruppentypen $N(V)$ bzw. $U(r,s)$ isomorph, wobei diese die Struktur
   $$N(V) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \in V,\ s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$
   mit einer Untergruppe $V \leq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und
   $$U(r,s) = \left\langle \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
   mit $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzen.
   (d) Es sei $p = 31$ und $a = 3$. Finde Zwischenkörper Z_i von L und $\mathbb{Q}$, die die Bedingungen
      i. $Z_1 \subset \mathbb{R}$ und $[L\colon Z_1] = 2$
      ii. $|Z_2\colon \mathbb{Q}] = 5$

   erfüllen. (10 Punkte)

2. Es seien $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$. Zeige:
   (a) Es seien $l_1, l_2 | p_1 \cdots p_n$. Dann gilt genau dann $\mathbb{Q}(\sqrt{l_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{l_2})$, wenn $l_1 = l_2$ gilt.
   (b) Die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ ist galoissch. Es gilt $G(L/\mathbb{Q}) \cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Beweise die Ausage durch Induktion nach n.
   Ein wichtiger Teil des Induktionsschrittes ist die Tatsache $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$.
   Benutze dazu Teilaufgabe a) mittels Aufzählung aller Zwischenkörper der Gestalt $\mathbb{Q}(\sqrt{l})$.

   (c) Bestimme sämtliche Zwischenkörper $L/Z/\mathbb{Q}$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Jede Untergruppe von $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ ist auch ein Unterraum des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (10 Punkte)

3. Die Gruppe $AG(5)$ aus Beispiel 2.7.2 ist zum semidirekten Produkt $N \times_\Phi U$ isomorph, wobei N ein Normalteiler von $AG(5)$ mit $|N| = 5$, U eine Untergruppe von $AG(5)$ mit $|U| = 4$ und $\Phi\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus ist.
Gib N, U und Φ an und beweise die Aussage. (4 Punkte)