Probeklausur zur Algebra

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %, keine Abgabe

1. Es sei L der Zerfällungskörper von $f(X) = X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
   (a) Gib eine Basis des Vektorraums L über $\mathbb{Q}$ an.
   (b) Finde ein $\sigma \in G(L/\mathbb{Q})$ mit $|\langle\sigma\rangle| = 3$ und beschreibe $\sigma(\vec{b})$ für die in Teilaufgabe a) gefundenen Basiselemente $\vec{b}$. (8 Punkte)

2. Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg(f) = 5$ und $G(f, \mathbb{Q}) \cong \gamma_5$. Weiter sei L ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Es sei mit $\alpha_j \in L$
   $$f(X) = \prod_{j=1}^{5}(X - \alpha_j).$$
   Die Folge der Zwischenkörper K_j sei durch $K_0 = \mathbb{Q}$ und $K_j = K_{j-1}(\alpha_j)$ für $1 \leq j \leq 5$ definiert.
   (a) Bestimme die Grade $[K_j : K_{j-1}]$ der Körpererweiterungen.
   (b) Ist f über $\mathbb{Q}$ bzw. über K_2 auflösbar? (10 Punkte)

3. Bestimme das zehnte Kreisteilungspolynom $\Phi_{10}(X)$. (6 Punkte)

4. Bestimme sämtliche $d \in \mathbb{N}$, für welche der Körper $GF(3^6)$ die d- ten Einheitswurzeln enthält. (8 Punkte)

5. Es seien p eine Primzahl, $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{2}, \zeta_p)$. Weiter sei
   $$G(p) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*,\ s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$
   Zeige:
   (a) $G(p)$ ist eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation.
   (b) $G(L/\mathbb{Q}) \cong G(p)$ (11 Punkte)

6. Gib die Definition folgender Begriffe an:
   (a) Kompositionsreihe
   (b) Kommutatoruntergruppe
   (c) Galoiserweiterung
   (d) Diskriminante
   (e) freier Modul (20 Punkte)

7. Es sei $f(X) = X^{15} + 21X^{10} - 3X^5 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass f auflösbar ist. (6 Punkte)

8. Es sei $R = K[X_1, X_2, X_3]$ der Ring der Polynome in drei Unbestimmten über einem Körper K. Stelle das symmetrische Polynom $f = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_0, s_1, s_2, s_3 \in R$ mit Koeffizienten aus K dar. (8 Punkte)

9. Es sei L/K eine Galoiserweiterung und Z ein Zwischenkörper.
Formuliere und beweise eine Bedingung, unter der jeder K- Isomorphismus von Z ein Automorphismus ist.
(8 Punkte)

10. Bestimme in den folgenden Körpererweiterungen L/K für die angegebenen Elemente $\alpha \in L$ das Minimalpolynom.

    (a) $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ und $\alpha = \sqrt{7}$

    (b) $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}$ und $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (8 Punkte)

11. Es sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

    (a) Zeige, dass L Zerfällungskörper von $f(X) = X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist.

    (b) Bestimme $[L\colon \mathbb{Q}]$.

    (c) Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimme die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$.

    (d) Bestimme zu sämtlichen Untergruppen H von $G(L/\mathbb{Q})$ die Fixkörper L^H.

    (e) Welche der in Teilaufgabe d) bestimmten Fixkörper sind über $\mathbb{Q}$ galoisch? (15 Punkte)

12. Es sei L/K eine Galoiserweiterung und $[L\colon K] = 15$. Weiter sei H eine Untergruppe von $G(L/K)$ mit $|H| = 5$. Es sei $\sigma \in H$. Für $\alpha \in L$ sei $\eta = \sum_{j=0}^{4} \sigma^j(\alpha)$.
Zeige, dass $[K(\eta)\colon K] \leq 3$ gilt. (8 Punkte)

13. Es sei $\mathcal{A}$ ein Ideal eines Rings R. Beweise, dass $\mathcal{A}$ genau dann ein freier R- Modul ist, wenn $\mathcal{A}$ ein Hauptideal ist, das von einem Nichtnullteiler erzeugt wird. (8 Punkte)

14. Finde ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$- Moduls $\mathbb{Z}^2$, das nicht zu einer Basis verkleinert werden kann.
(6 Punkte)

Viel Erfolg!