Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 6. Juli 2012, vor den Übungen

1. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$ und $P \in L(V,V)$ eine Projektion, d.h. $P^2 = P$, für welches $\operatorname{def} P = m$ mit $0 < m < n$ gelte.
   Bestimme das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von P. (3 Punkte)

2. Es sei die Matrix
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
   mit dem charakteristischen Polynom $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 8$ gegeben.
   Bestimme eine Matrix $\mathcal{X}$, so dass $\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{X}$ Jordansche Normalform besitzt. (5 Punkte)

3. Es seien $\lambda, r, s \in \mathbb{C}$ mit $rs \neq 0$ und die Matrizen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ mit
$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ r & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   gegeben.
   (a) Zeige, dass $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ dieselbe Jordansche Normalform $J \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ besitzen.
   (b) Bestimme Matrizen $\mathcal{T}_k \in GL(2,\mathbb{C})$, so dass $\mathcal{T}_k^{-1}\mathcal{A}_k\mathcal{T}_k = J$ für $k \in \{1,2\}$ gilt. (5 Punkte)

4. Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{6,6}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-2)^4 \cdot (\lambda+3)^2$.
   (a) Bestimme die Dimensionen der Haupträume $H(\mathcal{A},\lambda) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^6 : \vec{x} \in \operatorname{Kern}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}_6)^r\}$, wobei r die algebraische Ordnung des Eigenwerts λ ist.
   (b) Stelle alle möglichen Jordanschen Normalformen zusammen.
   (c) Gibt es zwei verschiedene mögliche Jordansche Normalformen mit gleichem Minimalpolynom aber verschiedenen geometrischen Ordnungen? (7 Punkte)

5. Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{(n,n)}$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.
   (a) Drücke die von der Summennorm $||\cdot||_1$ induzierte Matrixnorm $||\cdot||\colon \mathcal{A} \to ||\mathcal{A}||$ mittels der Spalten von $\mathcal{A}$ aus.
   (b) Es sei $||\mathcal{A}||_S := \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})}$ die Spektralnorm von $\mathcal{A}$.
   Zeige, dass die Vektornorm $||\cdot||_2$ die Spektralnorm induziert. (4 Punkte)