ulm university universität ulm

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24+3=27 Punkte
Abgabe: Freitag, 27. April 2012, vor den Übungen

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $\mathcal{A} \in K^{(n,n)}$.
   Weiter sei die Abbildung $f_{\mathcal{A}}\colon K^n \to K$ durch $f_{\mathcal{A}}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = \det \mathcal{C}$ definiert, wobei $\mathcal{C} = (\mathcal{A}\vec{b}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{b}_n)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\mathcal{A}\vec{b}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{b}_n$ ist.

   (a) Zeige: $f_{\mathcal{A}}$ ist eine n- fach alternierende Linearform.

   (b) Zeige: $f_{\mathcal{A}}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = (\det \mathcal{A}) \cdot (\det \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ ist.

   (c) Beweise unter Benutzung von Teilaufgabe b) den Determinantenmultiplikationssatz.

   (6 Punkte)

2. Es seien AB und BA quadratische Matrizen. Gib zwei beliebige Beispiele für A und B an, so dass $\det(AB) \neq \det(BA)$ gilt und begründe, warum dies nicht dem Determinantenmultiplikationssatz widerspricht. (2 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $x_0, x_1 \ldots, x_n \in K$. Weiter sei

$$\mathcal{A} = (x_i^j)_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

   Zeige mittels vollständiger Induktion nach n:

$$\det \mathcal{A} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

   Hinweis:
   Forme die Matrix folgendermaßen um: Subtrahiere das x_0- fache der n- ten Spalte von der $(n+1)$- ten Spalte, das x_0- fache der $(n-1)$- ten Spalte von der n- ten Spalte, …, das x_0- fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte. (5 Punkte)

4. Es sei H ein $(n-1)$- dimensionaler Unterraum des K^n, und es sei $\vec{x}^* \in K^n - H$.
   Ein Endomorphismus $\varphi\colon K^n \to K^n$ habe die Eigenschaften

   - $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in H$ und
   - $\varphi(\vec{x}^*) = -\vec{x}^*$.

   (a) Zeige, dass φ durch diese Forderungen eindeutig bestimmt ist.

   (b) Bestimme $\det \varphi$. (4 Punkte)

5. (a) Von welchem Grad in x ist das Polynom

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Addiert man zu sämtlichen n^2 Elementen einer Matrix $A = (a_{ij})$ vom Typ (n, n) eine Unbestimmte x, so ist die entstehende Determinante $D(x) = \det(a_{ij} + x)_{1 \le i,j \le n}$ ein Polxnom in x. Welchen Grad hat dieses Polynom? (4 Punkte)

6. (a) Zeige: Für $1 \le j, k \le n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ik} = \delta_{jk} \cdot \det A \quad \text{mit} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k, \end{cases}$$

wobei $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathcal{A}_{ij}$ Kofaktor der durch Streichung der i- ten Zeile und j- ten Spalte von $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$ entstehenden Matrix A_{ij} ist.

(b) Aufgabe 2 von Übungsblatt 1 (6 Punkte)