ulm university universität uulm

Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 11. Mai 2012, vor den Übungen um **8:00 Uhr c.m.t.**

1. Die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Bestimme die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(b)$ und die dadurch bestimmte Gruppe der Darstellungsmatrizen $M = \{\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})\colon \varphi \in \mathrm{Aut}(b)\}$ mit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Hinweis:
Untersuche zunächst die Gleichung $b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\mathcal{A}\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y})$ für $\vec{x}, \vec{y} \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

(b) Bestimme eine Untergruppe SM von M, die zur Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ isomorph ist. Der Isomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R} \to SM$ ist anzugeben.

Hinweis:
Es muss also $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt sein.

(c) Finde eine Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Bestimme die dadurch bestimmte Gruppe der Darstellungsmatrizen von

$$\tilde{M} = \{\mathcal{M}(\varphi; \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}})\colon \varphi \in \mathrm{Aut}(b)\}$$

und eine zu SM isomorphe Untergruppe von $\tilde{M}$.

(e) Finde ein Additionstheorem für die Funktion Cosinus hyperbolicus, d.h. finde einen Ausdruck für $\cosh(t_1 + t_2)$, der neben Ausdrücken in cosh noch Ausdrücke in sinh enthält.

Hinweis:
Die hyperbolischen Funktionen sind über

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

definiert. (8 Punkte)

2. Es sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\vec{a}, \vec{b} \in V$.
Zeige:

(a) den verallgemeinerten Satz des Pythagoras: $||\vec{a} + \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$,

(b) die Parallelogrammgleichung: $||\vec{a} + \vec{b}||^2 + ||\vec{a} - \vec{b}||^2 = 2(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2)$.

(c) Falls V Euklidisch ist, gilt die einfache Polarisationsgleichung: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{4}(||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2)$.

(d) Falls V unitär ist, gilt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{4}(||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2 + i||\vec{a} + i\vec{b}||^2 - i||\vec{a} - i\vec{b}||^2)$. (4 Punkte)

3. In der Vorlesung wurde die Norm eines Vektors $\vec{v}$ in Definition 6.2.1 über ein Skalarprodukt als $||\vec{v}|| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ definiert. Allgemeiner lässt sich eine Norm über die drei Aussagen von Satz 6.2.2 (positive Definitheit, absolute Homogenität und Subadditivität) definieren.

   (a) Zeige, dass auch nach dieser Definition $||\vec{v}|| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ für $\vec{v} \in V$, wobei V ein Euklidischer oder unitärer Raum ist, eine Norm auf V darstellt.

   Wir definieren nun $||\vec{w}||_\infty := \max_{j=1,\ldots,n} |w_j|$ für $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$.
   Zeige:

   (b) Es ist $|| \cdot ||_\infty$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

   (c) Für $n > 1$ wird $|| \cdot ||_\infty$ aber von keinem Skalarprodukt erzeugt, d.h. es gibt kein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ mit $\sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = ||\vec{w}||_\infty$ für alle $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. (6 Punkte)

4. Es sei K ein endlicher Körper.

   (a) Begründe, warum sich hier kein Skalarprodukt in analoger Weise zur Zugrundelegung eines reellen bzw. komplexen Körpers definieren lässt. An welcher Eigenschaft scheitert es?

   In Linearer Algebra I haben wir den Hammingabstand $d(\vec{x}, \vec{y})$ zweier Elemente $\vec{x}, \vec{y} \in K^n$ mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ in Beispiel 2.3.2 über $d\colon K^n \times K^n \to \mathbb{N}_0$ mit

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j \neq y_j\}|$$

   definiert, also über die Anzahl der Stellen, an denen sich $\vec{x}$ und $\vec{y}$ unterscheiden.

   Analog zur Norm lässt sich auch die Definition des Begriffs des Abstandes aus Definition 6.2.2 (i) als Abbildung $d\colon K^n \times K^n \to \mathbb{R}$ über folgende Eigenschaften für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in K^n$ verallgemeinern:

   - positive Definitheit: $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ und $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
   - Symmetrie: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
   - Subadditivität: $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$

   Zeige:

   (b) Der Hammingabstand stellt einen Abstand nach obiger Definition dar.

   (c) Für alle $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \in K^n$ gilt $d(\vec{a} + \vec{x}, \vec{a} + \vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y})$.

   (d) Durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ wird auf dem K^n eine symmetrische Bilinearform erklärt.

   (6 Punkte)