Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Mittwoch, 16. Mai 2012, vor den Übungen um 8:00 Uhr c.t.**

1. (a) Orthonormiere mittels des Gram- Schmidt- Verfahrens die Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \in V = \mathbb{R}^3$ aus Beispiel 3.7.2 mit

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzgl. des kanonischen Skalarproduktes.

(b) i. Zeige, dass im Vektorraum $\mathbb{C}^{(m,n)}$ durch $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{\text{Spur}} = \text{Spur}(\mathcal{B}^* \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ein Skalarprodukt definiert wird.

ii. Orthonormiere mittels des Gram- Schmidt- Verfahrens die Vektoren $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{C}^{(3,2)}$ mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Spur}}$.

<u>*Hinweis:*</u>
Die Spur einer Matrix wurde in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 11 in Linearer Algebra I über Spur $A := \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$ für $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ definiert. (8 Punkte)

2. Es sei $b \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $b(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathcal{A} \vec{y}$ mit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finde eine Orthonormalbasis des Euklidischen Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, b)$. (4 Punkte)

3. Es seien $V = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Polynome und dessen Unterraum $U = \{q(x) \in V \colon \deg(q) \le 2\}$ gegeben. Weiter sei $b(p,q) \colon V \times V \to \mathbb{R}$ über

$$b(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$$

definiert. Von Übungsblatt 3 wissen wir bereits, dass (V, b) ein Euklidischer Vektorraum ist.

(a) Finde eine Orthonormalbasis von U.

(b) Bestimme eine orthogonale Projektion von $p(x) = x^3$ auf den Unterraum U. (4 Punkte)

4. Es sei V die Menge aller Folgen $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

   (a) Zeige, dass die Menge V mit der Addition $(a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty} = (a_i + b_i)_{i=1}^{\infty}$ und der skalaren Multiplikation $\lambda \cdot (a_i)_{i=1}^{\infty} = (\lambda a_i)_{i=1}^{\infty}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ zu einem reellen Vektorraum wird.

   (b) Für $\vec{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ und $\vec{b} = (b_i)_{i=1}^{\infty}$ sei $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.
   Zeige, dass dann $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum ist.

   (c) Es sei $U = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in V \colon a_{2j} = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$ und $a_i \neq 0$ für höchstens endlich viele $i\}$.
   Bestimme $U^{\perp}$ und $(U^{\perp})^{\perp}$. (5 Punkte)

5. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $B \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, d.h. es gelte $d(B(\vec{x}), B(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Zeige: Es gibt $M \in O(n)$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, so dass $B(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{c}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

   Hinweis:
   Es sei $\vec{b}_j = B(\vec{e}_j) - \vec{c}$ sowie $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j$. Betrachte die beiden Folgen $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j$ und $B(\vec{x}_k)$ für $0 \leq k \leq n$. (3 Punkte)