Mittwoch, 13. Juni 2012, 16:00 Uhr s.t.

ulm university universität uulm

Probeklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 130 Punkte, 100 Punkte= 100 %

notwendige Punktzahl zum Bestehen der Probeklausur: 20 Punkte

1. (a) Bestimme die Determinante von $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Berechne S^{-1}. (12 Punkte)

2. Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $\det(A + 2E_n) = -4$ und $\det(A - E_n) = 0$.
   Bestimme $\det(A^2 + A - 2E_n)$. (6 Punkte)

3. Es sei $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t+1\}$ der Körper mit vier Elementen, in welchem $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t + 1$ gilt. Weiter seien $V = \mathbb{F}_4^{(2,2)}$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_4$ und $A, B \in V$.

   (a) Zeige, dass $b\colon V \times V \to \mathbb{F}_4$ mit $b(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ eine Bilinearform auf V darstellt.

   Hinweis:
   Dass die Spur die Eigenschaften $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}\,A + \mathrm{Spur}\,B$ sowie $\mathrm{Spur}(\alpha A) = \alpha \cdot \mathrm{Spur}\,A$ für alle $\alpha \in K$ und $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ besitzt, darf ohne Beweis verwendet werden.

   (b) Es sei

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   eine Basis von V. Bestimme die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)$ der Bilinearform b bzgl. $\mathcal{B}$. (12 Punkte)

4. Die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $b(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ definiert.

   (a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^3, b)$ ein Euklidischer Vektorraum ist.

   (b) Es seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)^T$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)^T$ und $\vec{v}_3 = (3, -2, 5)^T$ und $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ der von den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannte Unterraum.
   Bestimme die orthogonale Projektion $P_U(\vec{v}_3)$ von $\vec{v}_3$ auf den Unterraum U. (12 Punkte)

5. Es sei V ein Euklidischer Vektorraum und $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

   (a) Zeige, dass $\vec{x} - \vec{y}$ und $\vec{x} + \vec{y}$ genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn $||\vec{x}|| = ||\vec{y}||$ gilt.

   (b) Welche elementargeometrische Deutung steckt hinter Teilaufgabe a)?

   (c) Zeige, dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn $||\vec{x}|| \leq ||\vec{x} + \lambda\vec{y}||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. (8 Punkte)

6. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für alle komplexen Zahlen $z_i \in \mathbb{C}$ mit $1 \leq i \leq n$ die Ungleichung

$$|z_1| + \ldots + |z_n| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$$

gilt. (8 Punkte)

7. Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Wende auf die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Verfahren von Gram- Schmidt an und bestimme eine Orthonormalbasis von V. (10 Punkte)

8. (a) Gib eine Definition folgender Begriffe an:
   i. Sesquilinearform
   ii. Winkel
   iii. Eigenraum eines Eigenwerts

   (b) Formuliere den Fundamentalsatz der Algebra. (12 Punkte)

9. Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass dieses LGS unlösbar ist.

   (b) Bestimme alle Näherungslösungen $\vec{x}_0$ für dieses Gleichungssystem, so dass $||A\vec{x}_0 - \vec{b}||$ bzgl. des kanonischen Skalarproduktes minimal wird. (12 Punkte)

10. Betrachte die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimme die Eigenwerte mit ihren geometrischen Ordnungen und die Eigenvektoren von A.

   (b) Ist A diagonalisierbar?

   (c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist B reell diagonalisierbar? (14 Punkte)

11. (a) Es sei f ein Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch $\overline{z} = x - iy$ eine Nullstelle von f ist.

   (b) Es sei $A \in K^{(n,n)}$ und $B \in GL(n, K)$. Zeige: $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(B^{-1}AB)$.

   (c) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{(5,5)}$ und bekannt, dass A die beiden Eigenwerte i und $1 + i$ besitze. Ferner sei $\text{Spur}(A) = 0$. Berechne die Determinante von A. (12 Punkte)

12. Es seien $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und eine quadratische Form $Q(\vec{x}) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 10x_2^2$ gegeben.

   (a) Überprüfe Q auf Definitheit.

   (b) Führe die Hauptachsentransformation durch und stelle Q als Summe von Quadraten dar.

(12 Punkte)

Viel Erfolg!