Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
16.10.2013
Blatt 1

# Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 23.10.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Gegeben sind folgende Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \geq 1\right\} \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\right\} \\ P_1 &:= \left\{n \in \mathbb{N} : n \text{ Primzahl }, n < 11\right\} \\ P_2 &:= \left\{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\right\} \end{aligned}$$

   (a) Skizziere die Mengen $M_1$ und $M_2$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
   (b) Skizziere die Menge $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
   (c) Liste die Elemente von $P_1$ auf.
   (d) Liste alle Teilmengen der Menge $\{x \in P_2 : \text{Bezeichnung von } x \text{ besteht aus vier Buchstaben}\}$ auf.
   (e) Liste alle Elemente der Menge $P_1 \times P_2$ auf.
   (f) Beschreibe die Menge $(M_1 \times M_2) \cap (M_2 \times M_1)$ formal (und so knapp wie möglich).

   (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. Gib die Lösungsmengen der folgenden reellen Ungleichungen (sofern möglich) als Vereinigung von Intervallen an.

   (a) $x - 1 \leq 2$
   (b) $|2 - x| > 3$
   (c) $|x + 3| - 1 < |x + 2|$
   (d) $|x + 2| \cdot |x - 3| \leq 2$
   (e) $\frac{5}{-x^2-2} \geq (x^2 - 2)$

   (1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

3. Sei $M$ eine Menge, $M_1 \subset M$ und $M_2 \subset M$. Zeige, dass dann stets

$$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$$

   gilt.

   (2 Punkte)

*Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.*

4. Zeige folgende Behauptungen (z.B. mittels vollständiger Induktion):

   (a)
   $$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

   (b)
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$$

   (c)
   $$\forall m \in \mathbb{N} : \frac{m^3 - m}{6} \in \mathbb{N}_0$$

(2 + 2 + 2 Punkte)

5. Finde den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.

   Behauptung: Alle Gerichte in der Mensa schmecken gleich.
   Beweis: Idealisierend gehen wir von einer Mensa aus, die beliebig viele verschiedene Gerichte anbieten kann. Wir bezeichnen die verschiedenen Gerichte mit $G_1, G_2, \ldots, G_n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$).

   - Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
   - Induktionshypothese: Nun sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
   - Induktionsschritt: Wir betrachten die Gerichte $G_1, \ldots, G_{n+1}$. Gemäß der Induktionshypothese schmecken die Gerichte $G_1, \ldots, G_n$ gleich. Ebenso schmecken die Gerichte $G_2, \ldots, G_{n+1}$ gleich, da es sich um $n$ Gerichte handelt. Damit haben insbesondere die Gerichte $G_{n+1}$ und $G_n$ denselben Geschmack. Also ist der Geschmack aller $n + 1$ Gerichte identisch.

(1 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bitte Vorname, Nachname und SLC-Login auf das Blatt schreiben.