

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 30.10.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. (a) Berechne folgende Binomialkoeffizienten sofern sie definiert sind, oder begründe, weshalb sie nicht definiert sind:

$$\binom{6}{9}, \binom{-9}{6}, \binom{1,5}{3}, \binom{1}{3,5}, \binom{-1,5}{3}, \binom{3}{-2}, \binom{10^{101}}{10^{101}-1}, \binom{49}{6}$$

Gib bei der Berechnung mindestens einen Zwischenschritt an.

- (b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus 1$. Zeige die folgenden Gleichungen oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

$$\binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha-1}{n-1}, \quad 2^n - 1 = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right)$$

(4 + 4 Punkte)

2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$. Zeige, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

gilt.

(2 Punkte)

3. Entscheide, ob die folgenden Funktionen injektiv und surjektiv sind und begründe Deine Entscheidung. Bestimme gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

(b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(z) = 2z - 4$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], f(x) = \frac{2}{x^2+2}$

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es seien L, M, N Mengen und $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$ Funktionen. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Die Verkettung zweier injektiver Funktionen ist injektiv. Also ist

$$f, g \text{ injektiv} \Rightarrow g \circ f \text{ injektiv}$$

zu zeigen.

(b) Die Verkettung zweier surjektiver Funktionen ist surjektiv. Also ist

$$f, g \text{ surjektiv} \Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv}$$

zu zeigen.

(2 + 2 Punkte)

5. (a) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(x)\sqrt{x}}{3x^2+1}$. Bestimme $f'(x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{3x} + \left(\frac{x}{2}\right)^3$. Bestimme $(f^{-1})'(1)$.

Hinweis: Bei Aufgabenteil (b) kann vorausgesetzt werden, dass f invertierbar ist.

(1 + 1 Punkte)

In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection.

Hugo Rossi, 1996, *Mathematics is an Edifice, Not a Toolbox*,
Notices of the American Mathematical Society 43 (10): 1108
<http://www.ams.org/notices/199610/page2.pdf>

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname, Nachname und SLC-Login auf das Blatt schreiben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=51083>