Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
06.11.2013
Blatt 4

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 13.11.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Berechne die folgenden Integrale:
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \sum_{k=1}^{9} \frac{x^k}{k+1}$, bestimme $f^{(42)}(x)$ und $\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$, bestimme $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^{-1} f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x$ (für $a \in \mathbb{R}$).
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) := \frac{y}{1+y^4}$, bestimme $\int f(y)\,\mathrm{d}y$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(\int_{-y}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x\big)$.
   (d) $\int \big(\sin(2\varphi)\big)^2\,\mathrm{d}\varphi$
   (e) $\int_{-0,5}^{0,5} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$

   Gib jeweils mindestens einen Zwischenschritt an und kennzeichne partielle Integration sowie Substitution.

   Hinweis: Bei einem Integral der Form $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (sog. *unbestimmtes Integral*), soll eine Stammfunktion von $f(x)$ bestimmt werden.

   (3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

2. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := -2x^4 + 3x^3 - 6x + 5$, bestimme jeweils das zweite, vierte und fünfte Taylorpolynom von f in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.
   (b) Bestimme das vierte Taylorpolynom der Sinusfunktion in $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Zeige dann, dass das $(2n+1)$-te Taylerpolynom des Sinus in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Form
   $$T_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \big(x - \frac{\pi}{4}\big)^{2k}}{(2k+1)!} \Big(2k + 1 + x - \frac{\pi}{4}\Big)$$
   dargestellt werden kann.

   (3 + 3 Punkte)

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien jeweils mindestens n-mal differenzierbar. Außerdem sei die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := f(x)g(x)$ definiert. Zeige, dass dann
   $$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$
   für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

   (3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

`https://www.uni-ulm.de/?id=51083`