Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
13.11.2013
Blatt 5

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 20.11.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Gegeben sind folgende komplexe Zahlen:

$$z_1 := 2 - 3i, \quad z_2 := \frac{1}{2} + \sqrt{3}i, \quad z_3 := \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i}, \quad z_4 := i\,\mathrm{e}, \quad z_5 := \pi\,\mathrm{e}^{4\pi i}$$

   (a) Berechne $\overline{z}_i$ und $|z_i|$ für $i = 1, \ldots, 5$.
   (b) Bestimme $\mathrm{Re}\big(z_i^{-1}\big)$ und $\mathrm{Im}\big(z_i^{-1}\big)$ für $i = 1, \ldots, 5$.
   (c) Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{z_1}{z_2} = a + ib$ gilt.
   (d) Bestimme $r \in \mathbb{R}$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$, so dass $z_2 z_3 = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ gilt.
   (e) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^5 = z_1$.
   (f) Zeige, dass $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$ gilt.

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 Punkte)

2. (a) Kürze den folgenden Bruch so weit wie möglich:

$$\frac{x^3 - x^2 - 7x + 15}{(x^2 - 2x + 1 + 2i)(x + 3)}.$$

   Verwende dazu das Hornerschema. (Es gelte $x \in \mathbb{C}$ so dass $(x^2 - 2x + 1 + 2i)(x + 3) \neq 0$.)

   (b) Seien $x, z \in \mathbb{C}$ und

$$(x - z)(x - \overline{z}) = ax^2 + bx + c.$$

   Zeige, dass dann immer $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

(3 + 2 Punkte)

3. Bestimme jeweils ein Polynom P vom Grad $\deg(P)$, das $P(z_k) = w_k$ für alle k erfüllt. Begründe, ob es eindeutig bestimmt ist.

   (a) $\deg(P) = 2$, $z_k := k$, $k \in \{0, 1, 2\}$, $w_0 := 1 := w_2, w_1 := 0$.
   (b) Wie in (a), aber $z_2 := i$ und $w_2 := -2i$.
   (c) $\deg(P) = n$, $z_k := k\pi$, $w_k := \sin(z_k)$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ für $n = 11$.
   (d) Wie in (c), aber $\deg(P) = 3$ und $n = 2$.
   (e) Wie in (c), aber $n = 2$ und $z_k := \frac{k\pi}{2}$.

(2 + 1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ±1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=51083