Dr. H. Lanzinger
M. Harder

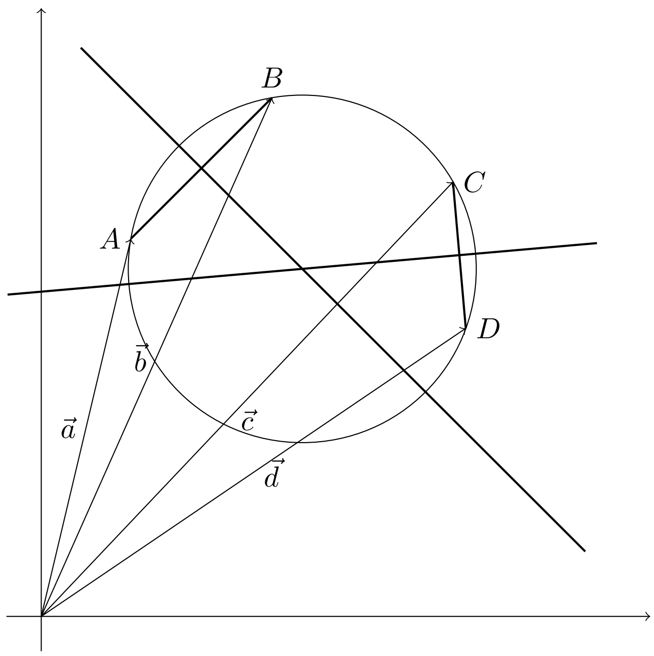
Winter 2013/2014
04.12.2013
Blatt 8

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 11.12.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Zeige, dass der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises wie folgt mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann: Seien A, B, C, D paarweise disjunkte Punkte auf dem Kreis. Nun konstruiert man jeweils die Mittelsenkrechte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten stimmt mit dem Mittelpunkt des Kreises überein.

   Skizze:



   Um dies zu zeigen, gehe wie folgt vor:

   (a) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeige, dass die Vektoren $\vec{v} := (\vec{x} + \vec{y})$ und $\vec{w} := (\vec{x} - \vec{y})$ genau dann zueinander orthogonal sind, wenn die Längen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ übereinstimmen..

   (b) Zeige, dass wenn die Punkte E und F auf einem Kreis mit Radius $r > 0$ um den Ursprung liegen, dass dann die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{EF}$ gerade durch den Ursprung verläuft.

   (c) Folgere die Behauptung aus (a) und (b).

   Hinweis: Bezeichnet man mit $\vec{a}$ den Vektor der vom Ursprung zum Punkt A verläuft ($\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ analog), dann stimmt die Strecke $\overline{AB}$ gerade mit der (entarteten) Ellipse

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{a} - \vec{x}| + |\vec{x} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|\}$$

   überein. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ist durch die (entartete) Hyperbel

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{a}| - |\vec{x} - \vec{b}| = 0\}$$

   gegeben.

(2 + 3 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

2. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Zeige, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ gilt.

   (b) Zeige, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$ gilt.

   (c) Formuliere eine Bedingung (die ohne das Vektorprodukt auskommt), die äquivalent zur Assioziativität des Vektorprodukts ist. Es soll also $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ genau dann gelten, wenn die Bedingung gilt.

   (d) Finde ein Beispiel für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, für die $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ gilt.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

3. (a) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq 0$. Zeige folgende Behauptungen:
   - Es existiert ein Vektor $\vec{a}^\perp \neq 0$ mit $\vec{a} \cdot \vec{a}^\perp = 0$.
   - Sei $\vec{a}^\perp$ solch ein Vektor. Für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ existiert dann ein $\lambda_b \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda_b \vec{a}^\perp$.

   (b) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{b} \neq 0$. Außerdem sei $\vec{b}^\perp \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{b} \cdot \vec{b}^\perp = 0$ und $\vec{b}^\perp \neq 0$. Zeige, dass die beiden Geraden

$$M_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \right\}$$
$$M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} \cdot \vec{b}^\perp = \vec{a} \cdot \vec{b}^\perp \right\}$$

   übereinstimmen.

   (c) Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, so dass $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$. Zeige, dass dann die beiden Ebenen

$$M_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \right\}$$
$$M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{x} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \right\}$$

   übereinstimmen.
   Folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden: Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$. Dann gilt:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = 0 \text{ existieren } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}.$$

   Falls etwa $v_2 w_3 - v_3 w_2 = (\vec{v} \times \vec{w})_1 \neq 0$, dann gilt $\vec{x} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ mit

$$\lambda := \frac{w_3 x_2 - w_2 x_3}{v_2 w_3 - v_3 w_2}, \qquad \mu := \frac{v_2 x_3 - v_3 x_2}{v_2 w_3 - v_3 w_2}$$

   Auch in den anderen Fällen können λ und μ analog berechnet werden.

   Hinweis: Wie üblich zeigt man $M_1 = M_2$ durch $M_1 \subset M_2$ und $M_1 \supset M_2$.

(3 + 3 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=51083