Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
18.12.2013
Blatt 10

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 08.01.2014, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Gegeben sind die Matrizen A und B mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass genau eine der beiden Matrizen invertierbar ist und bestimme ihre Inverse.

(4 Punkte)

2. Zeige, dass weder $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ noch $(\mathbb{R}^3, \times)$ eine Gruppe ist.

(2 Punkte)

3. Die sogenannten Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ sind durch

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

zusammen mit der Addition $+_n$ und Multiplikation $\cdot_n$ modulo n gegeben. Dabei entspricht $a \bmod n$ gerade dem Rest der ganzzahligen Division durch n. Gilt also $a = k + z \cdot n$ für ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ und ein $z \in \mathbb{Z}$, dann ist $a \bmod n = k$. Die Operationen $+_n$ und $\cdot_n$ sind wie folgt definiert:

$$a +_n b := (a+b) \bmod n,$$
$$a \cdot_n b := (ab) \bmod n.$$

(a) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ für $n = 3$ und $n = 4$ eine abelsche Gruppe ist.
(b) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ für $n = 3$ ein Körper ist, aber für $n = 4$ nicht.
(c) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ kein angeordneter Körper ist.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass bei der Darstellung $a = k + zn$ die ganze Zahl z und insbesondere k eindeutig sind (zumindest sofern $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt).

(3 + 3 + 2 Punkte)

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation $\circ$, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Zeige, dass dann $(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ ein Körper ist. Bestimme insbesondere das neutrale Element der Multiplikation $\circ$.

(6 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige zwei Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen:

   (b) Es seien $a, b, c \in K$, dann gilt $a < b$ und $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$.

   (c) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $0 < a \cdot a$. (Wir schreiben dann auch $a^2 := a \cdot a$.)

   Verwende dazu lediglich die Köperaxiome, die Rechenregeln für Körper, die Anordnungsaxiome und die Folgerung

$$\forall a, b \in K : \qquad a < b \quad \Longleftrightarrow \quad -a > -b \tag{a}$$

   die bereits in der Vorlesung bewiesen wurde. Gib bei jedem Schritt des Beweises an, welches Axiom (oder Rechenregel oder ggf. (a)) verwendet wurde.

(2 + 2 Punkte)

6. Skizziere die Kurve $\vec{x} : [0, 7] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \binom{t}{t} & \text{falls } t \in [0,1) \\ \binom{2-t}{1} & \text{falls } t \in [1,2) \\ \binom{t-2}{3-t} & \text{falls } t \in [2,3) \\ \binom{1}{t-3} & \text{falls } t \in [3,4) \\ \begin{pmatrix} 5-t \\ \frac{1}{2}(3-|9-2t|) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [4,5) \\ \binom{0}{6-t} & \text{falls } t \in [5,6) \\ \binom{t-7}{0} & \text{falls } t \in [6,7] \end{cases}$$

(0 Punkte)

Wir wünschen allen eine entspannte vorlesungsfreie Zeit und einen guten Start ins neue Jahr.

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=51083