Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
08.01.2014
Blatt 11

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 15.01.2014, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$, so dass $|a - b| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Zeige, dass daraus $a = b$ folgt.

(2 Punkte)

2. Wir betrachten die konvergenten Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n =: b \in \mathbb{R}$. Zusätzlich gelte

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeige, dass dann $a = b$ gilt.
   (b) Finde ein Beispiel für solche Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \neq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3 + 1 Punkte)

3. Es sei $a \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $c \in (0, \infty)$. Außerdem gelte

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \; \exists \tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq \tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon}) : |a_n - a| < c\tilde{\varepsilon}.$$

Zeige, dass dann $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ gilt.

(3 Punkte)

4. Bestimme (sofern sie existieren) Infimum und Supremum folgender Mengen:

   (a) $\mathcal{M}_a := \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right\}$
   (b) $\mathcal{M}_b := \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{m} \text{ für } n, m \in \mathbb{N}\right\}$

Gib jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt und begründe Deine Aussage.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Bestimme jeweils divergente reelle Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, so dass

   (a) die Folge $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

   (b) die Folge $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

   (c) die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

   (d) die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

   Zeige jeweils, dass die Folgen die geforderte Eigenschaft besitzen.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

6. Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen, sofern er existiert. Begründe andernfalls, weshalb er nicht existiert.

   (a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (b) $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ mit a_n wie in (a).

   (c) $(b_n)_{n=5}^{\infty}$ mit

$$b_n := (-1)^n \exp(-2n) + \frac{a_n}{\frac{n\pi}{2}}$$

   und a_n wie in (a).

(2 + 2 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.