Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
15.01.2014
Blatt 12

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 22.01.2014, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Bestimme alle Häufungswerte der folgenden Folgen. Gib für jeden Häufungswert eine Teilfolge an, die gegen ihn konvergiert.

   (a) $z_k := \exp\left(\frac{2+3k}{6}\pi i\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

   (b) $a_k := (-1)^k \cos(\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$. Bestimme auch $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k$ und $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$ an (mit Begründung).

   (c) $a_k := \exp\big((-k)^k\big)$, $k \in \mathbb{N}$. Bestimme auch $\liminf\limits_{k\to\infty} a_k$ und $\limsup\limits_{k\to\infty} a_k$ an (mit Begründung).

(2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   - $\sum_{k=1}^{n} a_k = s$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
   - $a_k = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Zeige durch (jeweils) ein Gegenbeispiel, dass keine der beiden Aussagen aus (a) aus der anderen folgt, wenn man „fast alle“ durch „unendlich viele“ ersetzt.

   (c) Es sei $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Zeige folgende Aussagen:
   - $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Longrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert für alle $m \in \mathbb{Z}$.
   - $\exists m \in \mathbb{Z} : \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

(3 + 2 + 3 Punkte)

3. Bestimme, welche der folgenden Reihen konvergieren und ob es sich um absolute Konvergenz handelt. Begründe jeweils Deine Aussage.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \exp\big(-\frac{i\pi k}{2}\big)$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\exp\big(-\frac{\pi k}{2}\big)\Big)^k$

   (c) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{\log(k)}$

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^4-1)+(-1)^k \sin(1-k^4)}{(k+1)^2}$

   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log\left(\sqrt{k}\right)}{k}\right)^k$

   (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{4+k}\right)^{2k}$

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Betrachte folgende Reihen:

(a) Es sei

$$a_k := \begin{cases} 2^{-k} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3^{-k} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

(b) Es sei $a_k := \frac{k}{k^2+1}$. Bestimme $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

(2 + 2 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=51083