Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
22.01.2014
Blatt 13

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 29.01.2014, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, wobei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ gilt.

   (a) Es sei
   $$a_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} =: b_k$$
   für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 0 =: b_0$. Zeige dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, aber nicht absolut. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert.

   (b) Es sei $a_k := 3^k, b_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 3$ sowie $b_0 := -2$. Zeige, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergieren. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert.

   Hinweis: Zeige bei (a) zunächst, dass $\frac{1}{\sqrt{j(k-j)}} \geq \frac{2}{k}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt.

   (2 + 2 Punkte)

2. Bestimme jeweils den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) z^{2k+1}$, für $z \in \mathbb{C}$.

   (b) $\sum_{k=4}^{\infty} k^4 4^k (z-4)^k$, für $z \in \mathbb{C}$.

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} k!(x - \mathrm{e})^k$, für $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$, für $z \in \mathbb{C}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|z| = R$.

   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$, für $x \in \mathbb{R}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|x| = R$.

   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Die sogenannte Indikatorfunktion einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \{0, 1\}, \qquad \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Existieren die folgenden Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Falls nicht, existieren die Grenzwerte von links und rechts? Begründe Deine Antworten.

(a) $x_0 = 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{falls } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $x_0 = 0$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ f'(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Überprüfe in diesem Fall die Existenz von $\lim_{x \to x_0} g(x)$ (evtl. einseitig).

(c) $x_0 = 1$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} := [0, 1]$

(d) $x_0 = 0$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} := \left\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{1}{y}\right\}$

(2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ±1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.