Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
29.01.2014
Blatt 14

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 05.02.2014, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Bei den folgenden Definitionen wurde die übliche Notation verändert. Gib an, welches die Definition von Stetigkeit ist und ordne die verwendete Notation der üblichen Notation zu. Falls es sich nicht um die Definition handelt, gib ein Beispiel für eine Funktion an, die nicht stetig ist, aber die Bedingungen erfüllt, oder eine Funktion die stetig ist, aber die Bedingungen nicht erfüllt.

   (a) Es sei $f \subset \mathbb{R}$ und $D : f \to \mathbb{R}$. Dann heißt D stetig (auf f), wenn

   $$\forall x \in f \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0 \in U_\varepsilon(x) \cap f \colon \big|D(x_0) - D(x)\big| < \delta$$

   gilt.

   (b) Es sei $x_0 \subset \mathbb{R}$ und $\varepsilon : x_0 \to \mathbb{R}$. Dann heißt ε stetig (auf x_0), wenn

   $$\forall D \in x_0 \ \forall f > 0 \ \exists x > 0 \ \forall \delta \in U_x(D) \cap x_0 \colon \big|\varepsilon(\delta) - \varepsilon(D)\big| < f$$

   gilt.

   (c) Es sei $\delta \subset \mathbb{R}$ und $x : \delta \to \mathbb{R}$. Dann heißt x stetig (auf δ), wenn

   $$\forall \varepsilon \in \delta \ \exists x_0 > 0 \ \forall D > 0 \ \forall f \in U_{x_0}(\varepsilon) \cap \delta \colon \big|x(f) - x(\varepsilon)\big| < D$$

   gilt.

(3 + 3 + 3 Punkte)

2. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f(x_0) < y$. Für alle $\delta > 0$ existiert ein $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ (das eventuell von δ abhängt), so dass $f(x) \geq y$ gilt. Zeige, dass f dann nicht stetig sein kann.

(3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

gilt.

(a) Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auch gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, deren Ableitung beschränkt ist auch Lipschitz-stetig ist.

(c) Zeige, dass aus Lipschitz-Stetigkeit nicht Differenzierbarkeit folgt. Zeige also, dass eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ existiert, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(3 + 3 + 3 Punkte)

4. Es sei $0 < \alpha < 1$ und $0 < c$. Zeige, dass dann

$$\lim_{x \to \infty} \left((x + c)^\alpha - x^\alpha \right) = 0$$

gilt.

Hinweis: Eventuell ist einer der Mittelwertsätze der Differenzialrechnung hilfreich.

(3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=51083