Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Zampiceni

Sommer 2013
29.04.2013
Blatt 02

Funktionale Datenanalyse

(Abgabe: Mo., 06.05.2013)

1. (a) Prüfe, dass $K(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)\mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$ eine Kernfunktion der Ordnung $(0,2)$ ist. Sie ist als *Epanechnikov* Kernfunktion bekannt.
   (b) Prüfe, dass $K(u) = \frac{15}{4}(u-u^3)\mathbb{I}_{[-1,1]}(u)$ eine Kernfunktion der Ordnung $(1,3)$ ist.

(3 Punkte)

2. Ein Wiener Prozess ist ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \in [0,+\infty)\}$ mit folgenden Eigenschaften:

   - $W(0) \stackrel{f.s}{=} 0$.
   - W hat unabhängige Zuwächse, d.h.: Für $0 = t_0 \leq \ldots \leq t_m$, $m \in \mathbb{N}$, die Zufallsvariablen $W(t_k) - W(t_{k+1})$ sind unabhängig für $k = 1, \ldots, m$.
   - W hat stationäre Zuwächse. Zusätzlich, für $0 \leq s \leq t$ gilt $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
   - W ist fast sicher stetig.

   (a) Berechne die Kovarianzfunktion $C_W(s,t)$.
   (b) Zeige, dass für $m \in \mathbb{N}$, und für $k = 1, \ldots, m$

$$W\left(\frac{k}{m}\right) := \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{k} Y_i \quad , \quad \text{wobei}$$
$$Y_k \sim \mathcal{N}(0,1) \; i.i.d \text{ für } k = 1, \ldots, m$$

   einem Wiener Prozess an den Punkten $0, \frac{1}{m}, \ldots, 1$ entspricht.
   (c) Benutze die Überlegung aus (b), um je 100 Realisierungen eines Wiener-Prozesses auf $[0,1]$ an der Stellen $\frac{k}{m}$ in `R` zu erzeugen, wobei m einmal gleich 10, einmal 100 und einmal 1000 ist.
   Plotte die drei Datensätze jeweils in einem gemeinsamen Bild. Berechne jeweils die zugehörige empirische Mittelwertvektor und Kovarianzmatrix und plotte diese.

(1,5+3,5+3 Punkte)

3. Sei $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Kernfunktion mit kompaktem Träger, und sei X eine Zufallsvariable mit absolut stetiger Dichte f. Zeige, dass für $h \to 0^+$

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{h}K\left(\frac{t-X}{h}\right)\right)^2\right) = \frac{1}{h}\|K\|_2^2 f(t)\,(1+o(1))$$

(3 Punkte)

`http://www.uni-ulm.de/index.php?id=47167`