Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Zampiceni

Sommer 2013
20.05.2013
Blatt 04 - Teil b

Funktionale Datenanalyse

(Abgabe: Mo., 27.05.2013, vor 13:15)

1. **B-Splines:** Nehmen wir an, dass die Knoten bei $\tau = (t_k = k,\ k \in \mathbb{Z})$ liegen (also bei ganzen Werten auf der reellen Achse) - hiermit kommen keine Randeffekte vo. Man kann B-Splines rekursiv definieren, durch:

$$B_{0,k}(x) = B_{0,k}(x|\tau) \quad := \quad \mathbb{I}_{[t_k,t_{k+1})}(x) \tag{1}$$

$$B_{p,k}(x) = B_{p,k}(x|\tau) \quad := \quad \frac{x - t_k}{t_{k+p} - t_k} B_{p-1,k}(x|\tau) + \frac{t_{k+p+1} - x}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} B_{p-1,k+1}(x|\tau) \tag{2}$$

(B-Splines vom Grad p)

Beweise folgende Aussagen:

(a) $B_{p,k}(x) = 0$ für $x < t_k$ oder $x \geq t_{k+p+1}$.

(b) $B_{p,k}(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Wenn x kein Knoten ist, dann ist $B_{p,k}(x)$ ein Polynom vom Grad p.

(d) $B_{p,k}(x)$ ist stetig und hat $p-1$ stetige Ableitungen für $p \geq 1$.
Benutze hierfür die folgende Eigenschaft:

$$\frac{dB_{p,k}(x)}{dx} = \frac{p}{t_{k+p} - t_k} B_{p-1,k}(x) + \frac{p}{t_{k+p+1} - t_{k+1}} B_{p-1,k+1}(x).$$

(6 Punkte)

2. Um eine (Familie von) B-Splines auf einem kompakten Intervall zu bestimmen, muss man die Knoten am Rand mehrmals betrachten. Wir möchten die B-Splines von Grad $p = 2$ auf $[0, 3]$ mit inneren Knoten $1, 2$ genauer betrachten. Der vollständige Knotenvektor ist dann $\tau = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$.

(a) Wie viele Knoten braucht man, um jede Funktion zu berechnen, wie viele Funktionen bekommt man?

(b) Benutze die Definition (1),(2), um die gesuchten B-Splines zu berechnen.
Unter Umstände kann 0 als Nenner auftreten (wann?). Allerdings ist dann die Funktion $B_{p,k}$ bzw $B_{p,k+1}$ automatisch die Nullfunktion. In diesen Fällen ignoriere die entsprechenden Summanden.

(c) Überprüfe, dass die Summe der berechneten Funktionen gleich $\mathbb{I}_{[0,3)}(x)$ ist.

(0,5+4,5+1 Punkte)