Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Zampiceni

Sommer 2013
10.06.2013
Blatt 07

Funktionale Datenanalyse

(Abgabe: Mo., 17.06.2013, vor 13:15)

Zur Erinnerung: Die empirische Eigenwertgleichung

$$\int_T \hat{C}(s,t)\tilde{\phi}(t)dt = \tilde{\phi}(s), \qquad s \in T \tag{1}$$

kann man diskretisieren durch die Matrixeigenwertgleichung:

$$\hat{K}\Delta\tilde{\vec{\phi}} = \tilde{\lambda}\tilde{\vec{\phi}},$$

wobei $\Delta = \frac{1}{M}$, $\tau_i := i\Delta$, $\hat{K} = \left(\hat{C}(\tau_i, \tau_j)\right)_{i,j=0}^{M} \in \mathbb{R}^{(M+1)\times(M+1)}$ und $\tilde{\vec{\phi}} \in \mathbb{R}^{M+1}$.

Das heißt, dass man die Matrix $\hat{K}\Delta$ betrachten kann, um die zugehörige Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{M+1}$ und Eigenvektoren $\widehat{\vec{\phi}_1}, \ldots, \widehat{\vec{\phi}}_{M+1}$ herzuleiten.

1. Wie kann man daraus näherungsweise Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (1) gewinnen?
2. Erzeugen Sie (wie auf Blatt 2, Aufgabe) 500 Realisierungen eines Wienerprozesses auf $[0,1]$ mit Stützpunkte $t_i = \frac{i}{m}$, $m = 1000$. In welcher der 3 Fälle aus der Vorlesung ist man?
   (a) Benutzen Sie das oben beschriebene Verfahren, um die Eigenwerte und die Eigenfunktionen zu schätzen.
   (b) Vergleichen Sie (graphisch) die ersten 100 geschätzte Eigenwerte mit den theoretischen, die man auf Blatt 6 bestimmt hat.
   (c) Vergleichen Sie (graphisch) die ersten 10 geschätzte Eigenfunktionen mit den theoretischen, die man auf Blatt 6 bestimmt hat.
   (d) Berechnen Sie die Koeffizienten $\xi_1^k, k = 1, \ldots, 500$ (die Scores) der 500 Realisierungen bezüglich der ersten Hauptfunktion.Sind sie tatsächlich normalverteilt?

(5 Punkte)

3. (a) Sei $\left(\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Zufallsvektoren. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{\vec{0},C} \iff \lambda_1 X_n + \lambda_2 Y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}^T C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

   (b) Folgern Sie daraus, dass für $X_1 \ldots, X_n$ unabhängige stochastische Prozesse auf $[0,1]$ mit $\mathbb{E}(X_i(t)^2) < \infty$ für alle $t \in [0,1]$ und Erwartungswertfunktion $\mu(t)$, für feste Punkte $s, t \in [0,1]$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i(s) - \mu(s)) \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i(t) - \mu(t)) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{\vec{0},K}$$

   mit einer geeigneten Matrix K.

(4+3 Punkte)