Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Zampiceni

Sommer 2013
08.07.2013
Blatt 10

# Funktionale Datenanalyse

(Freiwillige Abgabe: Mo., 15.07.2013, vor 13:15)

1. Seien $X = \{X(t), t \in T\} \in L_2(T)$ und $Y = \{Y(s), s \in S\} \in L_2(S)$ stochastische Prozesse mit $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ für alle $t \in T$, $\mathbb{E}(Y(s)) = 0$ für alle $s \in S$.Man betrachte das lineare Modell:

$$Y(s) = (\mathcal{L}_X \circ \beta_0)(s) + \epsilon(s),\ s \in S \Leftrightarrow Y = \mathcal{L}_X\beta_0 + \epsilon \tag{1}$$

wobei $\beta_0 \in L_2(S \times T)$ die Parameterfunktion ist, $\mathcal{L}_X$ der Operator definiert auf Blatt 9, $\epsilon \in L_2(S)$ ein Prozess mit $\mathbb{E}(\epsilon(s)) = 0$ für $s \in S$, wobei X und $\epsilon$ unkorreliert seien, d.h: Es gilt $\mathbb{E}(X(t)\epsilon(s)) = 0$ für alle $(s,t) \in S \times T$.

Dann sind folgende Aussagen für eine Funktion $\beta_0 \in L_2(S \times T)$ äquivalent:

(a) $\beta_0$ ist so, dass
$$Y = \mathcal{L}_X(\beta_0) + \epsilon.$$

(b) $\beta_0$ löst die Gleichung
$$C_{YX} = \Gamma(\beta),$$
wobei $C_{YX}(s,t) = cov(Y(s), X(t))$ für $t \in T$ und $s \in S$, und $\Gamma$ ist wie auf Blatt 9 definiert.

(c)
$$\beta_0 = \text{argmin}_{\beta \in L_2(S\times T)}\{\mathbb{E}(\|Y - \mathcal{L}_X(\beta)\|^2)\}.$$

Zeige, dass $(a) \Rightarrow (b)$, und dass $(b) \Rightarrow (c)$. Um zu zeigen, dass $(c) \Rightarrow (a)$ könnte man wie folgt argumentieren:

- $d^2 = \mathbb{E}(\|Y - \mathcal{L}_X(\beta_0)\|^2) \leq \mathbb{E}(\|Y - \mathcal{L}_X(\beta_0 + a\beta)\|^2)$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in L_2(S \times T)$.
- Nach Umformung, führt eine 'clevere' Wahl von $a$ zum gewünschten Ergebnis.

(2+4+4 Punkte)