Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
24.04.2013
Blatt 2

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 08.05.2013, 14:00h)

1. Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie die reellen Zahlen $\lambda_1 := 2$, $\lambda_2 := -1$ und $\lambda_3 := \frac{1}{2}$.

(a) Zeichne $\vec{w} := \lambda_k \vec{v}_i + \lambda_l \vec{v}_j$ für alle $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ mit $k < l$ und $i < j$ in ein gemeinsames Schaubild.

(b) Bestimme reelle Zahlen μ_1, μ_2, μ_3, so dass $\sum_{k=1}^{3} \mu_k \vec{v}_k = \vec{0}$ gilt (und $\mu_k \neq 0$ für mindestens ein k).

(3 + 2 Punkte)

2. Wir betrachten den Vektorraum $V := \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } P(x) = \sum_{k=0}^{3} c_k x^k, c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{R}\}$, sowie $P_1, \ldots, P_4 \in V$ mit

$$\begin{aligned} P_1(x) &:= x^3 + x^2 + x, \\ P_2(x) &:= 2x^2 + 3x + 4, \\ P_3(x) &:= -3x^3 + 2x^2 - x - \tfrac{1}{2}, \\ P_4(x) &:= 42x - 7. \end{aligned}$$

(a) Sind $P_1, \ldots, P_4$ linear unabhängig? Begründe Deine Antwort.

(b) Stelle $P_5 \in V$ mit $P_5(x) = x^2 + 1$ als Linearkombination von $P_1, \ldots, P_4$ dar.

(2 + 2 Punkte)

3. Zeige oder widerlege: U ist ein Untervektorraum von V mit

(a) $U := \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \vec{v} = \binom{1}{2} + \lambda \binom{0{,}5}{1}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ und $V := \mathbb{R}^2$.

(b) $U := \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : \vec{v} = \binom{2}{1} + \lambda \binom{0{,}5}{1}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ und $V := \mathbb{R}^2$.

(c) $U := \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : v_i \geq 0, i = 1, 2, 3\right\}$ und $V := \mathbb{R}^3$.

(d) $U := \left\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für } n \geq n_0\right\}$ und dem Vektorraum der konvergenten Folgen V.

(4 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Zeige, dass $\operatorname{span}(M_1) = \operatorname{span}(M_2)$, wobei

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(4 Punkte)

5. Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Untersuche für jeweils drei der vier Vektoren, ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind.

(4 Punkte)

6. Beweise Satz 1.14 aus der Vorlesung: Sei V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum. Zeige, dass dann U selbst auch ein Vektorraum ist.

(3 Punkte)