Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
01.05.2013
Blatt 3

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 08.05.2013, 14:00h)

1. Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. Betrachte folgende Abbildungen:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) := \sqrt{2}(x_1 - x_2, x_1 + x_2)$,
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der x_1-Achse,
- $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Streckung um das 1,5-fache in x_2-Richtung und um das 0,5-fache in x_1-Richtung (in x_1-Richtung findet also eine Stauchung statt).

(a) Zeichne für jede der Abbildungen ein Schaubild mit den Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sowie deren Bilder unter der jeweiligen Abbildung.

(b) Bestimme für jede Abbildung die darstellende Matrix. Gib also für jede Abbildung f_i eine Matrix A_i an, so dass $f_i(\vec{x}) = A_i\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und $i = 1, 2, 3$ gilt.

(3 + 3 Punkte)

2. Es seien $k, n, m \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \min\{n, m\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ Untervektorräume. Außerdem seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ eine Basis von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \in V$ seien beliebige Vektoren. Wir betrachten die Abbildung $f : U \to V$, wobei

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{b}_i$$

gilt.

Zeige, dass f additiv und homogen vom Grad 1 ist.

(3 Punkte)

3. Zeige oder widerlege: Die Abbildung f ist linear nach Definition 1.20, wobei

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ und $A = (\delta_{ij})_{i=1..5, j=1..3}$ sowie $\vec{b} := (5, 4, 3, 2, 1)^\top$ (δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol, sh. Vorlesung).

(b) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ und $A = (\delta_{ij})_{i=1..3, j=1..5}$ sowie $\vec{b} := \vec{0}$.

(c) $f : \mathbb{R}^{3\times5} \to \mathbb{R}^{5\times3}$ mit $f(A) := A^\top$.

(d) $f : V \to V$ mit $V := \left\{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } P(x) = \sum_{k=0}^{4} c_k x^k, c_0, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}\right\}$ und $f(P) := P'$.

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) := \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(f) Bestimme für die linearen Abbildungen der obigen Teilaufgaben 3(a)–3(e) jeweils Kern(f) und Bild(f).

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 6 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Betrachte $\mathbb{R}^5$ mit der Basis der Einheitsvektoren. Außerdem sind die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_5$ gegeben, mit

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Sofern möglich, ersetze in der Basis nacheinander $\vec{e}_i$ durch $\vec{v}_i$ für $i = 1, \dots, 5$.

(b) Der Vektor $\vec{x}$ ist durch

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der kanonischen Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_5$) gegeben. Gib die Darstellung des Vektors $\vec{x}$ bezüglich jeder der Basen aus Teilaufgabe 4(a) an.

(3 + 3 Punkte)