Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
08.05.2013
Blatt 4

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 15.05.2013, 14:00h)

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei linear, mit
$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$
   (a) Sofern möglich, berechne $f\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}$. Begründe sonst, wieso dies nicht möglich ist.
   (b) Bestimme Rang(f) und Kern(f).
   (c) Bestimme die darstellende Matrix A (bzgl. der Einheitsbasis) mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (2 + 1 + 4 Punkte)

2. Betrachte die folgende Matrix A:
$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   mit $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (a) Zeige, dass in A drei Zeilenvektoren existieren, die linear unabhängig sind, dass aber alle vier Zeilenvektoren linear abhängig sind.
   (b) Zeige, dass in A drei Spaltenvektoren existieren, die linear unabhängig sind, dass aber alle vier Spaltenvektoren linear abhängig sind.
   (c) Existieren in A auch drei Spaltenvektoren, die linear abhängig sind? Existieren in A drei linear abhängige Zeilenvektoren? Begründe Deine Antworten.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

3. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ mit
$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & \alpha & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   lösbar?

   (3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bei einer exklusiven Uni-Party gibt es neben dem Bier-Ausschank B und einer Cocktail-Bar C auch noch einen Austern-Verkauf A. Außerdem wurde DJ D für die Musik engagiert. Für die Anschaffung der Austern wurden 125 € benötigt, das Budget für das Bier war 375 €, die Cocktailzutaten kosteten 512,5 € und der DJ bot seine Dienste für 635 € an.

   Der DJ spielte insgesamt 350 Songs. 150 davon waren nötig um die Mannschaft des Bier-Ausschanks während der Aufbauarbeiten bei Laune zu halten (Cocktail-Bar und Austern-Verkauf wurden ohne DJ-Unterstützung aufgebaut). Während der Party konnten die Mitarbeiter der Verkaufsstände keine Musik hören, dafür wurden 10 Bier und 20 Cocktails ans DJ-Pult geliefert. Insgesamt wurden 250 Cocktails gemixt. Die Mitarbeiter des Austern-Verkaufs benötigten 100 Cocktails, die des Bier-Ausschanks dagegen keinen einzigen. An die Mitarbeiter des Austern-Verkaufs und der Cocktail-Bar wurden jeweils 50 Bier geliefert. Insgesamt wurden 300 Bier ausgeschenkt. Von den 600 Austern, die an jenem Tag verbraucht wurden, gingen 100 an den Bier-Ausschank und 50 an die Cocktail-Bar.

   Der Eigenbedarf der jeweiligen Kostenstellen wurde nicht erfasst. Man geht davon aus, dass er nicht vorhanden, also gleich Null war.

   Stelle eine Tabelle auf, aus der die Angaben für die innerbetriebliche Leistungsrechnung hervorgehen (primäre und sekundäre Kosten sowie Gesamtleistungen der Kostenstellen A, B, C, D). Stelle dann ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf (das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden).

   (4 Punkte)

5. Es sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5$ gegeben, mit

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 12 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   sowie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & -4 & -3 \\ 5 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimme den Rang der Matrix A (mit dem Gauß-Algorithmus).

   (b) Bestimme die Dimension von $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5) \subset \mathbb{R}^5$.

   (c) Bestimme die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mit

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{5} x_k \vec{v}_k \ .$$

   (2 + 2 + 1 Punkte)